В помощь учителю

Сефибеков Сефибек Рамазанович

ПАРАМЕТРЫ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

(*современные образовательные технологии-элективный курс*)

Дагестан-Кашкент. 2022

Сефибек Рамазанович
Сефибеков

Сефибеков

Сефибек Рамазанович

Почетный работник общего образования РФ,

Заслуженный учитель Республики Дагестан,

Учитель высшей категории,

Кандидат педагогических наук,

МКОУ «Кашкентская СОШ» Хивского района

Республики Дагестан.

Автор более 100 научных и методических работ, регулярно публикуются в журналах «Квант», «Математика в школе», «Математика»

Научные работы автора посвящены исследовательской деятельности школьников в урочной и внеурочной деятельности по математике на основе авторских элективных разработок «За страницами школьного учебника».

ИТОГИ 56-ЛЕТНЕЙ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ШКОЛЕ

Всем известно, как трудно сделать что-нибудь стоящее, поэтому я считаю себя счастливым, что мне удалось написать множество научно-методических, теоритических и педагогических трудов по математике. Но тщеславие отступает на задний план , когда думаешь о том , сколько проблем ты пытался вновь и вновь решать, но так и не смог. Ясно ,что никто не может претендовать на монополию в математических способностях или на создание прекрасного в математике. В беге не всегда одерживает победу быстрейший , а в борьбе-сильнейший !

Вся моя жизнь в математике была связана с тяжелым трудом. Я всегда знал, что нет королевского пути к математическим знаниям или к математическим открытиям. Но этот труд стоит того, чтобы его предпринимать. Для меня не существует большей радости, чем преодолевать препятствия и добиваться результата , и вероятно, каждый чувствует себя счастливее ,когда делает работу, которая ему нравится (психологами доказано ,что, если такая работа дает свои результаты, то- это долголетие для человека!).

Я часто испытывал чувство восхищения и удивления красотой математики. Не могу придумать более подходящей аналогии, чем восхождение на вершины гор. Огромные усилия тут неизбежны . Но как прекрасно, проложив новый путь , который казался столь трудным , любоваться с вершины раскинувшимся перед тобой пейзажем и наслаждаться его красотой . В зрелом возрасте оглядываясь назад и размышляя над математикой с новых точек зрения, иногда удивляешься собственным старым результатам и почти не веришь, что они принадлежат тебе. Они представляются тебе самостоятельными сущностями, не зависимыми от их автора. Иногда даже приятно наблюдать так свои работы , забывая о собственном авторстве.

Я полностью удовлетворен своей 56- летней учительской работой, и не желал бы для себя никакой другой судьбы. Некоторые учителя , удалившись на покой или даже несколько раньше , кажется , утрачивают интерес к работе, которая их занимала много лет. Необъяснимо, как они могут так полностью порывать с интересами своей предыдущей жизни. Что же касается меня, то я рад продолжать свою работу и написать научно-педагогические труды. Но я буду удовлетворен и если просто сохраню любовь к профессии учителя математики!

Сефибек Рамазанович Сефибеков

СОДЕРЖАНИЕ

От автора.

Тема «параметры» является самой наболевшей и трудной темой курса математики средней школы (и не только!). Причина в том, что она не отражена в школьных учебниках математики. Однако, при сдаче ЕГЭ профильного уровня требуется знания по этой теме (задание 18). В связи с этим, здесь привожу методическую разработку данной темы. Изложение материала простое и доступное учащимся средней школы. Учителя могут ознакомить учащихся с данным материалом на элективных занятиях после изучения программного материала. Затрагиваемый здесь вопрос полезен также и студентам педагогических вузов по специальности «Математика».

Февраль, 2022г. С.Р.Сефибеков.

ПЕРВИЧНОЕ ЗНАКОМСТВО С ПАРАМЕТРОМ

Задача с параметром — исследовательская задача.

С. Р. Сефибеков

Задачи с параметром встречаются в различных разделах математики (при решении уравнений, неравенств, систем уравнений и т. д.) и в заданиях ЕГЭ. Однако в школьном курсе математики таким задачам внимания уделяется недостаточно.

В курсе алгебры 7 класса рассматривается линейное уравнение с одной переменной. С этого вопроса можно начать ознакомление учащихся с параметром (на уроке, на кружковых и элективных занятиях).

Что такое параметр? Чтобы ответить на этот вопрос, начнём с линейного уравнения.

Линейным уравнением с одной переменной называют уравнение вида

$$ax=b, \qquad (*)$$

где a и b — некоторые числа, x — переменная; a называют коэффициентом при переменной x, b — свободным членом.

Сколько решений может иметь уравнение (*)?

1. Если $a\neq 0$, то уравнение имеет единственное решение

$$x=\frac{b}{a}.$$

Пример 1. $2x=6$, $x=\frac{6}{2}$, $x=3$.

Пример 2. $2x=0$, $x=\frac{0}{2}$, $x=0$.

2. Если $a=0$ и $b\neq 0$, то уравнение решений не имеет: $0\cdot x\neq b$, так как $0\cdot x=0$ при любом $x\in\mathbb{R}$, а $b\neq 0$. Значит, $x\in\varnothing$ ($\varnothing$ — пустое множество).
3. Если $a=0$ и $b=0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$0\cdot x=0,\ x\in\mathbb{R},$$

так как произведение любого числа x и нуля есть нуль.

В уравнении (*) числа a и b будем называть иначе, а именно параметрами!

Замечание. Не следует путать параметры a и b с переменной (неизвестной) x.

Универсального метода решения задач с параметрами не существует. Решить задачу с параметром означает, что для всех допустимых значений параметра требуется найти значения переменной x.

Приведём общую схему решения линейного уравнения (*) с параметром.

Исследуем коэффициент a при переменной x:

- ✓ если $a=0$, то имеем уравнение $0\cdot x=b$, которое решаем при каждом значении параметра b;
- ✓ если $a\neq 0$, то, решая уравнение (*), получим:

$$x=\frac{b}{a}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите уравнение

$$\left(a^2+2\right)x=b+1.$$

Решение

Поскольку $a^2+2>0$ при всех $a\in\mathbb{R}$, то уравнение имеет единственное решение

$$x=\frac{b+1}{a^2+2}.$$

Ответ. При $a\in\mathbb{R}$ $x=\frac{b+1}{a^2+2}$.

Пример 2. Решите уравнение

$$(a-1)ax=3\left(a^2-1\right).$$

Решение

Если коэффициент при переменной x равен нулю, то имеем:

$$(a-1)a=0,$$

откуда

$$\left[\begin{aligned}&a=0,\\&a-1=0;\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&a=0,\\&a=1.\end{aligned}\right.$$

При $a=0$ имеем: $0\cdot x=-3$, $x\in\varnothing$.

При $a=1$ имеем: $0\cdot x=0$, $x\in\mathbb{R}$.

При $a\neq 0$ и $a\neq 1$ имеем:

$$x=\frac{3\left(a^2-1\right)}{(a-1)a}=\frac{3(a-1)(a+1)}{(a-1)a}=\frac{3a+3}{a}.$$

Ответ. При $a=0$ корней нет; при $a=1$ $x\in\mathbb{R}$; при $a\neq 0$ и $a\neq 1$ $x=\frac{3a+3}{a}$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(a^2+a-2\right)x=a^2-1$$

не имеет решений.

Решение

Уравнение не имеет решений при условии

$$\begin{cases} a^2+a-2=0, \\ a^2-1\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-2, \\ a=1; \end{array}\right. \\ a^2\neq 1; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-2, \\ a^2\neq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a=1, \\ a^2\neq 1; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-2, \\ (-2)^2=4\neq 1 \text{ (истинно)}, \end{cases} \\ \begin{cases} a=1, \\ 1^2\neq 1 \text{ (ложно)}, \end{cases} \end{array}\right.$$

откуда $a=-2$.

Ответ. При $a=-2$.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(a^2+6a-7\right)x=a^2-49$$

имеет одно решение.

Решение

Уравнение имеет одно решение при

$$a^2+6a-7\neq 0,$$

откуда $a\neq -7$; $a\neq 1$.

Ответ. При $a\neq -7$ и при $a\neq 1$.

Пример 5. Решите уравнение

$$\left(a^2-7a+12\right)x=4(a-3)$$

в зависимости от параметра a.

Решение

1) $a^2-7a+12=0$, откуда $a=3$; $a=4$.

При $a=3$ $0\cdot x=0$, $x\in\mathbb{R}$;

при $a=4$ $0\cdot x=4$, $x\in\varnothing$.

2) $a^2-7a+12\neq 0$, откуда $a\neq 3$; $a\neq 4$.

При $a\neq 3$ и $a\neq 4$ имеем единственное решение

$$x=\frac{4(a-3)}{a^2-7a+12}=\frac{4(a-3)}{(a-3)(a-4)},\quad x=\frac{4}{a-4}.$$

Ответ. При $a=3$ $x\in\mathbb{R}$; при $a=4$ корней нет; при $a\neq 3$, $a\neq 4$ $x=\dfrac{4}{a-4}$.

Пример 6. При каких значениях параметра a уравнение

$$a\left(a^3+1\right)x=a^2-1$$

имеет более одного решения?

Решение

Требование задачи выполняется, если

$$\begin{cases} a\left(a^3+1\right)=0, \\ a^2-1=0. \end{cases}$$

Далее имеем:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a^3+1=0, \end{array}\right. \\ a^2=1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a=-1, \end{array}\right. \\ a^2=1; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0, \\ a^2=1, \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1, \\ a^2=1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0, \\ 0^2=1 \text{ (ложно)}, \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1, \\ (-1)^2=1 \text{ (истинно)}, \end{cases} \end{array}\right.$$

откуда $a=-1$.

Ответ. При $a=-1$.

Пример 7. Найдите все значения параметра a из промежутка $(-12;4]$, при которых уравнение

$$(a+2)(a-2)(a+1)x=a^2-4$$

имеет единственное решение.

Решение

1) Если $a\neq\pm 2$, то $0\cdot x=0$, $x\in\mathbb{R}$.

2) Если $a=-1$, то $0\cdot x=-3$, $x\in\varnothing$.

3) Если $a\neq\pm 2$, $a\neq -1$, то

$$x=\frac{a^2-4}{(a+2)(a-2)(a+1)},\quad\text{или}\quad x=\frac{1}{a+1}.$$

По условию $a\in(-12;4]$. Но $a=\pm 2$, $a=-1$ не дают единственного решения, равного $\dfrac{1}{a+1}$. Исключая эти значения из промежутка $(-12;4]$, получим ответ.

Ответ. $a\in(-12;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;4]$.

Пример 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$(2-a)x=(a+1)(a-2)$$

имеет решение, большее 4? Найдите это решение.

Решение

Если $2-a=0$, $a=2$, то

$$0\cdot x=0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Если $a \neq 2$, то

$$x = \frac{(a+1)(a-2)}{2-a}, \text{ или } x = -a-1.$$

По условию задачи

$$x > 4. \qquad (*)$$

Определим, при каких значениях a будет выполняться это условие.

Подставляя в (*)

$$x = -a-1,$$

получим:

$$-a-1 > 4, \; a < -5.$$

Ответ. $x > 4$ при $a \in (-\infty; -5)$; $x = -a-1$.

УРАВНЕНИЯ, СВОДЯЩИЕСЯ К ЛИНЕЙНЫМ

В примерах 1–8 не рассматривалась область допустимых значений переменной x (ОДЗ уравнения).

Перейдём к примерам, где ОДЗ играет существенную роль.

Пример 9. Решите уравнение

$$\frac{1}{x+3} = a$$

для всех значений параметра a.

Решение

ОДЗ: $x \neq -3$.

Преобразуем заданное уравнение, получим:

$$ax + 3a = 1,$$

$$ax = 1 - 3a. \qquad (*)$$

Решим уравнение (*) как уравнение с параметром a.

Если $a = 0$, то $0 \cdot x = 1$, $x \in \varnothing$.

Если $a \neq 0$, то $x = \frac{1-3a}{a}$.

Теперь проверим, существует ли значение параметра a, при котором $x = -3$. Для этого подставим значение $x = -3$ в уравнение (*), получим: $-3a = 1 - 3a$, $0 = 1$ — ложно!

Следовательно, не существует таких значений параметра a, при которых $x = -3$. Поэтому ответ запишем следующим образом: при $a = 0$ $x \in \varnothing$; при $a \neq 0$ $x = \frac{1-3a}{a}$.

Ответ. При $a = 0$ корней нет; при $a \neq 0$

$$x = \frac{1-3a}{a}.$$

Пример 10. Для всех значений параметра a решите уравнение $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{a-1} = 3$.

Решение

ОДЗ: $x \neq 2$.

При $a - 1 = 0$, $a = 1$ уравнение не имеет смысла.

Преобразуем заданное уравнение, получим:

$$(3a-5)x = 7a - 11. \qquad (*)$$

Если $3a - 5 = 0$, $a = \frac{5}{3}$, то из (*) следует, что

$$0 \cdot x = \frac{2}{3},$$

то есть $x \in \varnothing$.

Если $a \neq \frac{5}{3}$, то

$$x = \frac{7a-11}{3a-5}.$$

Проанализируем ОДЗ. Если $x = 2$, то из уравнения (*) имеем:

$$6a - 10 = 7a - 11,$$

откуда $a = 1$.

Следовательно, при $a = 1$ получим запрещённое значение.

Учитывая все решения, получим ответ.

Ответ. При $a = \frac{5}{3}$ и при $a = 1$ корней нет; при $a \neq \frac{5}{3}$ $x = \frac{7a-11}{3a-5}$.

Пример 11. Для всех значений параметра a решите уравнение $\frac{ax+4}{x-4} = 5$.

Решение

ОДЗ: $x \neq 4$.

Преобразуем заданное уравнение, получим:

$$ax + 4 = 5x - 20,$$

$$(a-5)x = -24. \qquad (*)$$

Если $a - 5 = 0$, $a = 5$, то $0 \cdot x = -24$, $x \in \varnothing$.

Если $a \neq 5$, то $x = -\frac{24}{a-5}$.

Согласно ОДЗ, переменная $x \neq 4$. Найдём те значения параметра a, при которых $x = 4$. Для этого подставим $x = 4$ в (*), получим:

$$(a-5) \cdot 4 = -24, \; a = -1.$$

Чтобы выполнялось ОДЗ, параметр a не должен быть равен -1. Тогда при $a \neq -1$ и $a \neq 5$

$$x = -\frac{24}{a-5}.$$

Ответ. При $a = -1$ и при $a = 5$ корней нет; при $a \neq -1$ и при $a \neq 5$ $x = -\frac{24}{a-5}$.

Пример 12. Для всех значений параметра a решите уравнение

$$\frac{3x+a}{x-3}=a+1.$$

Решение

ОДЗ: $x\neq 3$.

Преобразуем заданное уравнение, получим:

$3x+a=ax-3a+x-3$, или $(a-2)x=4a+3$. (*)

Если $a-2=0$, $a=2$, то уравнение (*) имеет вид: $0\cdot x=11$, $x\in\varnothing$.

Если $a\neq 2$, то

$$x=\frac{4a+3}{a-2}$$

и, с учётом ОДЗ, получим:

$$\frac{4a+3}{a-2}\neq 3,\ 4a+3\neq 3a-6,$$

откуда $a\neq -9$.

Ответ. При $a=2$, $a=-9$ корней нет; при $a\neq 2$, $a\neq -9$ $x=\dfrac{4a+3}{a-2}$.

Пример 13. Для всех значений параметра a решите уравнение $\dfrac{ax+4}{a-3}=2$.

Решение

Поскольку выражение $a-3$ с параметром a стоит в знаменателе дроби, то $a-3\neq 0$, $a\neq 3$. При $a=3$ уравнение не имеет смысла.

Пусть $a\neq 3$. Преобразуем уравнение, получим:

$$ax+4=2a-6,\ ax=2a-10.$$

Если $a=0$, то $0\cdot x=-10$, $x\in\varnothing$.

Если $a\neq 0$, то $x=\dfrac{2a-10}{a}$.

Ответ. При $a=0$, $a=3$ корней нет; при $a\neq 0$, $a\neq 3$ $x=\dfrac{2a-10}{a}$.

Пример 14. Для всех значений параметра a решите уравнение

$$\frac{x+3a}{(x-2)a}=4.$$

Решение

ОДЗ: $x\neq 2$.

При $a=0$ уравнение не имеет смысла.

При $x\neq 2$ и $a\neq 0$ имеем:

$$x+3a=4ax-8a,\ (4a-1)x=11a.$$

Если $4a-1=0$, $a=\dfrac{1}{4}$, то $0\cdot x=\dfrac{11}{4}$, $x\in\varnothing$.

Если $a\neq\dfrac{1}{4}$, то

$$x=\frac{11a}{4a-1}. \qquad (*)$$

Проверим, удовлетворяет ли x из (*) ОДЗ, имеем:

$$\frac{11a}{4a-1}\neq 2,\ 11a\neq 8a-2,\ a\neq -\frac{2}{3},$$

то есть при $a=-\dfrac{2}{3}$ $x\in\varnothing$. Поэтому если $a\neq 0$, то

$$x=\frac{11a}{4a-1}.$$

Ответ. При $a\neq -\dfrac{2}{3}$, $a\neq 0$, $a\neq\dfrac{1}{4}$ $x=\dfrac{11a}{4a-1}$; при $a=-\dfrac{2}{3}$, $a=\dfrac{1}{4}$, $a=0$ корней нет.

Пример 15. Решите уравнение

$$\frac{x+a}{ax+3}=2$$

с параметром a.

Решение

ОДЗ: $ax+3\neq 0$.

Преобразуем заданное уравнение, получим:

$$x+a=2ax+6,\ (2a-1)x=a-6.$$

Если $2a-1=0$, $a=\dfrac{1}{2}$, то

$$0\cdot x=-5\frac{1}{2},\ x\in\varnothing.$$

Если $a\neq\dfrac{1}{2}$, то

$$x=\frac{a-6}{2a-1}. \qquad (*)$$

Подставляя выражение (*) в ОДЗ, получим:

$$\frac{a(a-6)}{2a-1}+3\neq 0,\ a^2\neq 3,$$

то есть $a\neq\pm\sqrt{3}$.

Ответ. При $a\neq\dfrac{1}{2}$, $a\neq\pm\sqrt{3}$ $x=\dfrac{a-6}{2a-1}$; при $a=\dfrac{1}{2}$, $a=\pm\sqrt{3}$ корней нет.

Пример 16. Решите уравнение

$$\frac{x+a}{(a+2)x}=1$$

с параметром a при условии, что $x\in[-5;1)$.

Решение

ОДЗ: $x\neq 0$.

При $a+2=0$, $a=-2$ уравнение не имеет смысла.

Преобразуем заданное уравнение, получим:

$$x+a=(a+2)x,$$

$$(a+1)x=a. \qquad (1)$$

Если $a+1=0$, $a=-1$, то

$$0\cdot x=-1, \quad x\in\varnothing.$$

Если $a\neq-1$, также и $a\neq-2$, из уравнения (1) находим:

$$x=\frac{a}{a+1}.$$

Согласно ОДЗ $x\neq0$, значит,

$$\frac{a}{a+1}\neq0,$$

откуда $a\neq0$.

Так как по условию $x\in[-5;1)$, то определим, при каких $a\neq-2;-1;0$ выполняется это условие. Для этого решим систему неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{a+1}\geq-5,\\ \dfrac{a}{a+1}<1;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{a+\frac{5}{6}}{a+1}\geq0,\\ \dfrac{1}{a+1}>0,\end{cases}$$

откуда $a+\frac{5}{6}\geq0$, $a\geq-\frac{5}{6}$;

$$a\in\left[-\frac{5}{6};+\infty\right). \qquad (2)$$

Исключая из (2) запрещённое значение $a=0$, получим окончательно: если

$$a\in\left[-\frac{5}{6};0\right)\cup(0;+\infty),$$

то $x=\dfrac{a}{a+1}$.

Ответ. При $a\in\left[-\frac{5}{6};0\right)\cup(0;+\infty)$ $x=\dfrac{a}{a+1}$; при $a\in(-\infty;-2]\cup\left[-2;-\frac{5}{6}\right)\cup\{0\}$ корней нет.

Пример 17. При каких значениях параметра a выражение $\dfrac{ax-4}{5x+a}$ равно 4 хотя бы при одном значении x?

Решение

Решим уравнение

$$\frac{ax-4}{5x+a}=4.$$

ОДЗ: $5x+a\neq0$, $x\neq-\dfrac{a}{5}$.

Преобразуем уравнение, получим:

$$ax-4=20x+4a, \quad (a-20)x=4a+4.$$

Если $a-20=0$, $a=20$, то

$$0\cdot x=84, \quad x\in\varnothing.$$

Если $a\neq20$, то

$$x=\frac{4a+4}{a-20}. \qquad (*)$$

Согласно ОДЗ

$$x\neq-\frac{a}{5},$$

поэтому, подставляя значение x из равенства (*), решим неравенство относительно a:

$$\frac{4a+4}{a-20}\neq-\frac{a}{5}.$$

Имеем:

$$20a+20\neq-a^2+20a,$$

откуда $a^2\neq-20$. Значит, для любого $a\neq20$ ОДЗ выполняется.

Ответ. a — любое число, кроме 20.

Пример 18. При каких значениях параметра a выражение $\dfrac{8x+a}{ax+4}$ не равно 1 ни при каких значениях x?

Решение

Рассмотрим уравнение

$$\frac{8x+a}{ax+4}=1. \qquad (*)$$

Определим при каких x это уравнение не имеет решений.

ОДЗ: $ax+4\neq0$.

Преобразуем уравнение (*), получим:

$$8x+a=ax+4,$$

$$(a-8)x=a-4.$$

Если $a-8=0$, $a=8$, то $0\cdot x=4$, $x\in\varnothing$.

Если $a\neq8$, то $x=\dfrac{a-4}{a-8}$ и согласно ОДЗ

$$\frac{a(a-4)}{a-8}+4\neq0.$$

Далее имеем:

$$a^2-4a+4a-32\neq0, \quad a^2\neq32, \quad a\neq\pm4\sqrt{2}.$$

Уравнение (*) не будет иметь корней при

$$a=\pm4\sqrt{2}.$$

Ответ. При $a=8$ и при $a=\pm4\sqrt{2}$.

УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ И ПАРАМЕТРОМ

При решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, применяют следующие методы:

- ✓ раскрытие модуля по определению;
- ✓ возведение обеих частей уравнения в квадрат;
- ✓ метод интервалов (метод разбиения на промежутки);
- ✓ графический метод.

Метод интервалов заключается в следующем:

1) находят нули подмодульных выражений;
2) откладывают полученные значения на числовой прямой, которая при этом разбивается на промежутки, в каждом их которых свой знак подмодульного выражения;
3) решают уравнение на каждом из этих промежутков.

На практике метод интервалов обычно применяют тогда, когда уравнение содержит более одного модуля.

Решим несколько уравнений с параметром a.

Пример 19. Решите уравнение $|x-2| = x+a$.

Решение

Раскроем модуль по определению. Получим совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge 2,\\ x-2 = x+a,\end{cases}\\ \begin{cases}x<2,\\ 2-x = x+a,\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge 2,\\ a=-2,\end{cases}\\ \begin{cases}x<2,\\ 2x = 2-a.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (*)$$

Из второй системы совокупности (*) найдём те значения параметра a, при которых $x<2$:

$$x=\frac{2-a}{2},\ \ \frac{2-a}{2}<2,\ \ 2-a<4,\ \ a>-2.$$

Ответ. При $a=-2$ $x\in[2;+\infty)$; при $a>-2$ $x=\frac{2-a}{2}$; при $a<-2$ корней нет.

Пример 20. Решите уравнение $|3x+a| = x-3$.

Решение

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x \ge -a,\\ 3x+a = x-3,\end{cases}\\ \begin{cases}3x<-a,\\ -3x-a = x-3,\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge -\frac{a}{3},\\ x=-\frac{a+3}{2},\end{cases} \quad (1)\\ \begin{cases}x<-\frac{a}{3},\\ x=\frac{3-a}{4}.\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$$

Из системы (1) имеем:

$$-\frac{a+3}{2}\ge-\frac{a}{3},\ \ -3a-9\ge-2a,\ \ a\le-9.$$

Значит, при $a\le-9$ $x=-\frac{a+3}{2}$.

Из системы (2) имеем:

$$\frac{3-a}{4}<-\frac{a}{3},\ \ 9-3a<-4a,\ \ a<-9.$$

Значит, при $a<-9$ $x_1=-\frac{a+3}{2}$, $x_2=\frac{3-a}{4}$; при $a=-9$ $x=-6$. При других значениях параметра a корней нет.

Ответ. При $a<-9$ $x_1=-\frac{a+3}{2}$, $x_2=\frac{3-a}{4}$; при $a=-9$ $x=3$; при $a>-9$ корней нет.

Пример 21. Решите уравнение $a|x+3|=4$.

Решение

Пусть параметр $a=0$. Тогда уравнение принимает вид: $0\cdot|x+3|=4$, откуда $x\in\varnothing$.

Если $a<0$, то $a|x+3|\le0$, то есть $a|x+3|\ne4$ — уравнение корней не имеет.

Если $a>0$, то уравнение равносильно следующему:

$$|x+3|=\frac{4}{a}.$$

Далее имеем:

$$\left[\begin{array}{l}x+3=\frac{4}{a},\\ x+3=-\frac{4}{a};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{4-3a}{a},\\ x=\frac{-4-3a}{a}.\end{array}\right.$$

Ответ. При $a \in (-\infty;0]$ корней нет; при $a \in (0;+\infty)$ $x_1 = \frac{4-3a}{a}$, $x_2 = \frac{-4-3a}{a}$.

Пример 22. Решите уравнение $a|x+1| = a^2 + a$.

Решение

Раскрывая модуль, получим совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} ax = a^2, \\ x \geq -1, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} -ax = a^2 + 2a, \\ x < -1. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решим систему (1). Из уравнения $ax = a^2$ имеем:

если $a = 0$, то $0 \cdot x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, и с учётом $x \geq -1$ получим: при $a = 0$ $x \in [-1;+\infty)$;

если $a \neq 0$, то $x = \frac{a^2}{a} = a$, с учётом $x \geq -1$ имеем $a \geq -1$.

Значит, при $a \in [-1;+\infty)$ $x = a$.

Решим систему (2). Из уравнения

$$-ax = a^2 + 2a$$

имеем:

если $a = 0$, то $0 \cdot x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, и с учётом $x < -1$ получим: при $a = 0$ $x \in (-\infty;-1)$;

если $a \neq 0$, то $x = -a-2$, с учётом $x < -1$ получим: $-a-2 < -1$, $a > -1$. Значит, при $a \in (-1;+\infty)$ $x = -a-2$.

Объединяя решения систем (1) и (2), получим ответ.

Ответ. При $a = 0$ $x \in (-\infty;+\infty)$; при $a = -1$ $x = -1$; при $a \in (-1;0) \cup (0;+\infty)$ $x_1 = -a-2$, $x_2 = a$; при $a \in (-\infty;-1)$ корней нет.

Пример 23. Решите уравнение $|x-a| = |x-3|$.

Решение

Возведём обе части уравнения в квадрат, получим уравнение, равносильное данному:

$$x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - 6x + 9, \text{ или } (2a-6)x = a^2 - 9.$$

Пусть

$$2a - 6 = 0, \ a = 3.$$

Тогда имеем:

$$0 \cdot x = 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

Пусть $a \neq 3$, тогда

$$x = \frac{a^2-9}{2a-6} = \frac{(a-3)(a+3)}{2(a-3)}, \quad x = \frac{a+3}{2}.$$

Ответ. При $a = 3$ $x \in \mathbb{R}$; при $a \neq 3$ $x = \frac{a+3}{2}$.

Пример 24. Решите уравнение $|x+2| + |x-3| = a$

Решение

Способ 1 (аналитический). Решим уравнени методом разбиения на промежутки (методом интервалов). $x+2=0$, $x=-2$; $x-3=0$, $x=3$.

Таким образом, числовая ось разбивается н три интервала:

1) $x \in (-\infty;-2)$;

2) $x \in [-2;3]$;

3) $x \in (3;+\infty)$.

Рассмотрим заданное уравнение на интервале 1), то есть при $x < -2$. Для таких значений переменной x $x+2<0$ и $x-3<0$. Поэтому получаем уравнение

$$-x-2-x+3 = a, \ -2x+1 = a,$$

откуда $x = \frac{1-a}{2}$.

Найдём значения параметра a, при которых $x \in (-\infty;-2)$. Для этого решим неравенство

$$\frac{1-a}{2} < -2, \ 1-a < -4, \ a > 5.$$

Значит, при $a \in (5;+\infty)$ корень заданного уравнения $x = \frac{1-a}{2}$ будет принадлежать промежутку $x \in (-\infty;-2)$.

Рассмотрим заданное уравнение на интервале 2). Здесь первый модуль раскрывается как положительный, а второй как отрицательный. Получим следующее уравнение:

$$x+2-x+3 = a,$$

откуда $a = 5$. Таким образом, при этом значении параметра заданное уравнение имеет бесконечное множество корней, принадлежащих отрезку $[-2;3]$.

На третьем интервале для $x \in (3;+\infty)$ оба модуля раскрываются как положительные, получаем уравнение:

$$x+2+x-3 = a, \text{ или } 2x-1 = a,$$

откуда $x = \frac{a+1}{2}$.

Значение параметра a, при котором

$$x \in (3;+\infty),$$

находим из неравенства

$$\frac{a+1}{2} > 3.$$

Имеем: $a+1>6$, откуда $a>5$. Таким образом, при $a>5$ корень заданного уравнения, равный

$$x=\frac{a+1}{2},$$

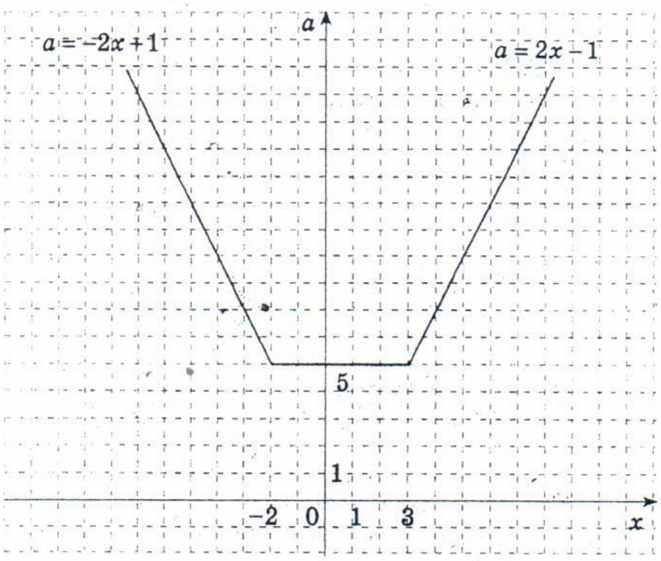
принадлежит промежутку $(3;+\infty)$.

Объединяя решения на всех трёх интервалах, получим: при $a\in(-\infty;5)$ корней нет; при $a=5$ $x\in[-2;3]$; при $a\in(5;+\infty)$

$$x_1=\frac{1-a}{2},\ x_2=\frac{a+1}{2}.$$

Способ 2 (графический). На координатной плоскости $x0a$ построим график функции

$$a=|x+2|+|x-3|=\begin{cases}-2x+1,\ a<-2,\\ 5,\ -2\le x\le 3,\\ 2x-1,\ x>3.\end{cases}$$



По рисунку делаем вывод: при $a\in(-\infty;5)$ уравнение корней не имеет; при $a=5$ уравнение имеет корни $x\in[-2;3]$; при $a\in(5;+\infty)$ уравнение имеет корни, которые находим из уравнений $a=-2x+1$, $x_1=\dfrac{1-a}{2}$, и $a=2x-1$, $x_2=\dfrac{a+1}{2}$.

Ответ. При $a\in(-\infty;5)$ корней нет; при $a=5$ $x\in[-2;3]$; при $a\in(5;+\infty)$ $x_1=\dfrac{1-a}{2}$, $x_2=\dfrac{a+1}{2}$.

Пример 25. Решите уравнение $\dfrac{a|x|+2}{x-2}=4$.

Решение

ОДЗ: $x\ne2$.

Раскроем модуль, получим, что заданное уравнение равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge0,\\ \dfrac{ax+2}{x-2}=4,\end{cases}\quad(1)\\ \begin{cases}x<0,\\ \dfrac{-ax+2}{x-2}=4.\end{cases}\quad(2)\end{array}\right.$$

Решим систему (1).

Из уравнения системы имеем:

$$\frac{ax+2}{x-2}=4,$$

$$ax+2=4x-8,\ \text{или}\ (a-4)x=-10.$$

Если $a=4$, то $0\cdot x=-10$, $x\in\varnothing$.

Если $a\ne4$, то $x=\dfrac{-10}{a-4}$.

Согласно ОДЗ $x\ne2$, то есть

$$\frac{-10}{a-4}\ne2,$$

откуда $a\ne-1$. Так как $x\ge0$, то

$$\frac{-10}{a-4}\ge0,\ \text{или}\ a-4<0,\ a<4.$$

Следовательно, при $a\in(-\infty;-1)\cup(-1;4)$

$$x=-\frac{10}{a-4}.$$

Решим систему (2). Из уравнения системы имеем:

$$\frac{-ax+2}{x-2}=4,\ -ax+2=4x-8,\ \text{или}\ (a+4)x=10.$$

Если $a+4=0$, $a=-4$, то $0\cdot x=10$, $x\in\varnothing$.

Если $a\ne-4$, то $x=\dfrac{10}{a+4}$.

Согласно ОДЗ $x\ne2$, то есть

$$\frac{10}{a+4}\ne2,\ 2a+8\ne10,\ a\ne1.$$

Так как $x<0$, то есть

$$\frac{10}{a+4}<0,$$

то $a+4<0$, $a<-4$.

Следовательно, при $a\in(-\infty;-4)$ $x=\dfrac{10}{a+4}$.

Объединяя решения этих двух систем, получим ответ.

Ответ. При $a\in(-\infty;-4)$ $x_1=\dfrac{10}{4-a}$, $x_2=\dfrac{10}{a+4}$; при $a\in[-4;-1)\cup(-1;4)$ $x=\dfrac{10}{4-a}$; при $a=-1$, $a\in[4;+\infty)$ корней нет.

Задача с параметром — исследовательская задача.

С. Р. Сефибеков

ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Начнём с определения.

Линейным неравенством называют неравенство вида $ax \vee b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа (параметры), а знак «$\vee$» означает один из знаков неравенства: «$>$», «$<$», «$\geq$», «$\leq$».

Решением линейного неравенства называют множество таких значений переменной, которые обращают его в верное числовое равенство.

При решении неравенств пользуются правилами:

- ✓ Если слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный, то получится неравенство, равносильное исходному.
- ✓ Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то получится неравенство, равносильное исходному.
- ✓ Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится.
- ✓ Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.

Приведём общую схему решения линейного неравенства с параметром.

Пусть линейное неравенство представлено в виде

$$ax \leq b. \qquad (*)$$

1. Пусть $a = 0$. Тогда, подставив его в исходное неравенство (*), получим неравенство $0x \leq b$, которое решаем при каждом значении параметра b.
2. Теперь рассмотрим случай, когда $a > 0$. Решим исходное неравенство (*), получим решение $x \leq \frac{b}{a}$.
3. Рассмотрим случай, когда $a < 0$. Решим исходное неравенство (*), получим решение $x \geq \frac{b}{a}$.

Аналогичную схему решения можно привести и для неравенства $ax \geq b$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решите неравенство

$$ax > 0.$$

Решение

1) Если $a = 0$, то $0x > 0$, решений нет, так как $0x = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

2) Если $a > 0$, то $x > \frac{0}{a}$, $x > 0$.

3) Если $a < 0$, то $x < \frac{0}{a}$, $x < 0$.

Ответ. При $a = 0$ решений нет; при $a \in (0; +\infty)$ $x \in (0; +\infty)$; при $a \in (-\infty; 0)$ $x \in (-\infty; 0)$.

Пример 2. Решите неравенство

$$\left(a - a^2\right)x \leq 0.$$

Решение

Пусть $a - a^2 = 0$.

Имеем:

$$a - a^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - a)a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 1. \end{array}\right.$$

Отсюда при $a = 0$ или $a = 1$ неравенство принимает вид: $0x \leq 0$. Значит, $x \in \mathbb{R}$ при $a = 0$ и $a = 1$.

Пусть $a - a^2 < 0$.

Имеем:

$$a - a^2 < 0 \Leftrightarrow a(a - 1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0, \\ a > 1, \end{array}\right.$$

то есть $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

При этом решением исходного неравенства является $x \geq 0$, $x \in [0; +\infty)$.

Пусть $a - a^2 > 0$.

Имеем:

$$a - a^2 > 0 \Leftrightarrow a(a - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1,$$

то есть $a \in (0; 1)$.

Здесь решением неравенства является

$$x \leq 0, \ x \in (-\infty; 0].$$

Ответ. При $a = 0$ и $a = 1$ $x \in \mathbb{R}$; при $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ $x \in [0; +\infty)$; при $a \in (0; 1)$ $x \in (-\infty; 0]$.

Пример 3. Решите неравенство

$$(3-a)x \geq a+2.$$

Решение

1) Если $a=3$, то $0x \geq 5$, решений нет.

2) Если $a<3$, то $x \geq \dfrac{a+2}{3-a}$.

3) Если $a>3$, то $x \leq \dfrac{a+2}{3-a}$.

Ответ. При $a=3$ решений нет; при $a<3$ $x \geq \dfrac{a+2}{3-a}$; при $a>3$ $x \leq \dfrac{a+2}{3-a}$.

Пример 4. Решите неравенство

$$\left(a^2-3a-10\right)x \geq a^2-4.$$

Решение

Поскольку

$$a^2-3a-10=(a-5)(a+2)$$

и

$$a^2-4=(a-2)(a+2),$$

то неравенство можно переписать в виде

$$(a-5)(a+2)x \geq (a-2)(a+2).$$

Пусть $(a-5)(a+2)=0$; отсюда имеем: $a=-2$, $a=5$.

1) Если $a=5$, то $0x \geq 21$, решений нет.

2) Если $a=-2$, то $0x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$;

Пусть

$$(a-5)(a+2)>0;$$

отсюда имеем: $a \in (-\infty;-2) \cup (5;+\infty)$.

Тогда решением будет $x \geq \dfrac{a-2}{a-5}$.

Пусть

$$(a-5)(a+2)<0;$$

отсюда $-2<a<5$, $a \in (-2;5)$.

Тогда решением будет $x \leq \dfrac{a-2}{a-5}$.

Ответ. При $a=5$ решений нет; при $a=-2$ $x \in \mathbb{R}$; при $a \in (-\infty;-2) \cup (5;+\infty)$ $x \geq \dfrac{a-2}{a-5}$; при $a \in (-2;5)$ $x \leq \dfrac{a-2}{a-5}$.

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $(a-4)x<a+2$ выполняется для всех значений x из отрезка $[-5;4]$.

Решение

1) При $a=4$ имеем:

$$0x<6, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) При $a>4$ $x<\dfrac{a+2}{a-4}$, поэтому, согласно условию, получаем

$$\frac{a+2}{a-4}>4, \quad a+2>4a-16,$$

$3a<18$, $a<6$, то есть $4<a<6$, $a \in (4;6)$ (*рис. 1*).

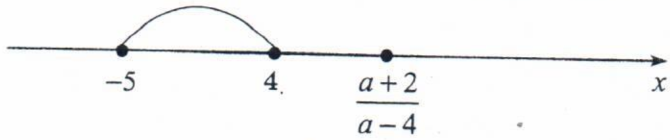


Рис. 1

3) При $a<4$ $x>\dfrac{a+2}{a-4}$, поэтому по условию получаем:

$$\frac{a+2}{a-4}<-5, \quad a+2>-5a+20, \quad 6a>18,$$

$a>3$, то есть $3<a<4$, $a \in (3;4)$ (*рис. 2*).

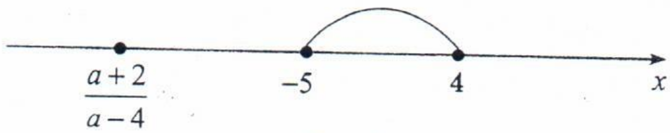


Рис. 2

Объединяя все решения, получим ответ.

Ответ. $a \in (3;6)$.

Пример 6. Решите неравенство

$$\frac{ax}{a+2}>3.$$

Решение

При $a+2=0$, $a=-2$ неравенство не имеет смысла.

1) Пусть $\dfrac{a}{a+2}=0$; отсюда $a=0$. Тогда неравенство принимает вид $0x>3$, что не может быть, значит, решений нет.

2) Если

$$\frac{a}{a+2}<0, \quad a(a+2)<0, \quad -2<a<0, \quad a \in (-2;0),$$

то

$$x<\frac{3}{\frac{a}{a+2}}, \quad x<\frac{3(a+2)}{a}.$$

3) Если

$$\frac{a}{a+2}>0, \quad a(a+2)>0, \quad a \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty),$$

то

$$x>\frac{3}{\frac{a}{a+2}}, \quad x>\frac{3(a+2)}{a}.$$

Объединяя все решения, получим ответ.

Ответ. При $a=-2$ решений нет; при $a\in(-2;0)$ $x\in\left(-\infty;\frac{3a+6}{a}\right)$; при $a\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ $x\in\left(\frac{3a+6}{a};+\infty\right)$.

Пример 7. Решите неравенство

$$\frac{a-1}{x-2}<0.$$

Решение

ОДЗ: $x-2\neq 0,\quad x\neq 2.$

1) При $a-1=0,\quad a=1$ неравенство сводится к виду

$$\frac{0}{x-2}<0,$$

которое решений не имеет.

2) При $a-1>0,\quad a>1$ имеем:

$$\frac{1}{x-2}<0,\quad x-2<0,\quad x<2,\quad x\in(-\infty;2).$$

3) При $a-1<0,\quad a<1$ имеем:

$$\frac{1}{x-2}>0,\quad x-2>0,\quad x>2,\quad x\in(2;+\infty).$$

Объединяя все решения, получим ответ.

Ответ. При $a=2$ решений нет; при $a\in(1;+\infty)$ $x\in(-\infty;2)$; при $a\in(-\infty;1)$ $x\in(2;+\infty)$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\frac{a+2}{(a-3)(x+5)}\geq 0.$$

Решение

ОДЗ: $x+5\neq 0,\quad x\neq -5.$

При $a-3=0,\quad a=3$ неравенство не имеет смысла.

1) Пусть $\frac{a+2}{a-3}=0$, тогда $a=-2$ и исходное неравенство принимает вид:

$$0\cdot\frac{1}{x+5}\geq 0,\quad \text{или } 0\geq 0.$$

Тогда $x\in(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$.

2) При

$$\frac{a+2}{a-3}>0,\quad (a+2)(a-3)>0,\ a\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$$

исходное неравенство принимает вид:

$$\frac{1}{x+5}\geq 0,\quad \text{откуда } x>-5,\quad x\in(-5;+\infty).$$

3) При $\frac{a+2}{a-3}<0,\quad a\in(-2;3)$ исходное неравенство принимает вид:

$$\frac{1}{x+5}\leq 0,\quad \text{откуда } x<-5,\quad x\in(-\infty;-5).$$

Ответ. При $a=-2$ $x\in(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$; при $a\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$ $x\in(-5;+\infty)$; при $a\in(-2;3)$ $x\in(-\infty;-5)$; при $a=3$ решений нет.

Пример 9. Решите неравенство

$$(a-2)x\leq a+3$$

для всех $x\leq 2$.

Решение

1) Пусть $a-2=0,\quad a=2.$ Тогда заданное неравенство принимает вид: $0x\leq 3$, откуда $x\in\mathbb{R}$. Учитывая условие $x\leq 2$, получим: $x\in(-\infty;2]$.

2) Пусть $a-2>0,\ a>2.$ Тогда

$$x\leq\frac{a+3}{a-2}.$$

По условию $x\leq 2$. Рассмотрим расположение точек $\frac{a+3}{a-2}$ и 2 на координатной прямой.

Пусть

$$\frac{a+3}{a-2}>2,\quad \frac{-a+7}{a-2}>0,\quad \frac{a-7}{a-2}<0,\quad (a-7)(a-2)<0,$$

откуда $2<a<7$. Условие $a>2$ соблюдается, значит, при $a\in(2;7)$

$$x\leq\frac{a+3}{a-2}.$$

Пусть

$$\frac{a+3}{a-2}\leq 2,\quad \frac{a-7}{a-2}\geq 0,\quad a-7\geq 0\ (\text{так как } a-2>0),$$

откуда $a\geq 7$. Значит, при $a\geq 7$ $x\leq 2$.

3) Пусть $a-2<0,\ a<2.$ Тогда

$$x\geq\frac{a+3}{a-2}.$$

По условию $x\leq 2$. Рассмотрим расположение точек $\frac{a+3}{a-2}$ и 2 на координатной прямой.

Пусть $\frac{a+3}{a-2}\geq 2,\quad \frac{-a+7}{a-2}\geq 0,\quad \frac{a-7}{a-2}\leq 0,\quad a-7\geq 0$ (так как $a-2<0$), откуда $a\geq 7$. По допущению $a<2$, то есть решений нет.

Пусть

$$\frac{a+3}{a-2}<2,\quad \frac{a-7}{a-2}>0,\quad a-7<0\ (\text{так как } a-2<0),$$

откуда $a<7$. По допущению $a<2$, поэтому при $a<2$ $x\in\left[\frac{a+3}{a-2};2\right]$.

Объединяя все решения, получим ответ.

Ответ. При $a=2$ $x\in(-\infty;2]$; при $a\in(2;7)$ $x\leq\frac{a+3}{a-2}$; при $a\in[7;+\infty)$ $x\in(-\infty;2]$; при $a\in(-\infty;2)$ $x\in\left[\frac{a+3}{a-2};2\right]$.

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Систему линейных уравнений с двумя неизвестными x и y можно записать в виде:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \qquad (*)$$

Из курса геометрии известно, что взаимное расположение двух прямых на плоскости может быть следующим:

1) прямые пересекаются (то есть имеют одну общую точку);
2) прямые параллельны (то есть не имеют ни одной общей точки);
3) прямые совпадают (то есть у них все точки общие).

В первом случае система линейных уравнений имеет единственное решение, во втором — не имеют решений, в третьем — имеет бесконечно много решений. Эти выводы для системы (*) линейных уравнений, записанной в общем виде, можно алгебраически сформулировать следующим образом:

а) если соответствующие коэффициенты уравнений пропорциональны, то есть

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

то система имеет бесконечное множество решений;

б) если

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2},$$

то система не имеет решений;

в) если

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2},$$

то система имеет единственное решение.

Основными методами решения системы линейных уравнений являются метод подстановки метод сложения.

Пример 10 ([1], в. 3, 14). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ 4x - 2y = a \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Решение

Система имеет бесконечно много решений, и выполняются соотношения

$$\frac{a}{4} = \frac{1}{-2} = \frac{1}{a},$$

откуда $a = -2$.

Ответ. $a = -2$.

Пример 11 ([1], в. 4, 14). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение

Система не имеет решений, если выполняются соотношения:

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a} \neq \frac{a^2}{1}.$$

Имеем:

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{a}, \\ a \neq a^2, \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 1, \\ a \neq 1, \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a = 1, \end{array} \right. \\ a \neq 1, \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -1, \\ a \neq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1, \\ a \neq 1, \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a \in \varnothing, \end{array} \right.$$

откуда $a = -1$.

Ответ. $a = -1$.

Пример 12 ([1], в. 5, 14). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение

Система имеет единственное решение, если выполняются соотношения:

$$\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a}.$$

Имеем: $a^2 \neq 1$, откуда $a \neq -1$, $a \neq 1$.

Ответ. $a \neq \pm 1$.

Пример 13. Для каждого значения a решите систему

$$\begin{cases} (a-4)x + 2y = 4, \\ (a-4)^2 x + 4ay = 16. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение

При решении данной системы применим метод подстановки. Следует учитывать, что коэффициенты при неизвестных могут обращаться в нуль. Поэтому если из какого-либо уравнения системы будем находить выражение одного из неизвестных (например, x) через другое, то будем отдельно рассматривать случай обращения в нуль коэффициента при этом неизвестном.

Пусть $a-4=0$, тогда имеем:

$$\begin{cases}0x+2y=4,\\0x+4\cdot 4y=16,\end{cases}\quad \begin{cases}y=2,\\y=1,\end{cases}$$

откуда решений нет. Значит, при $a-4=0$, $a=4$ система (1) решений не имеет.

Пусть $a\neq 4$. Тогда из первого уравнения системы (1) имеем:

$$x=\frac{4-2y}{a-4}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) вместо x во второе уравнение системы (1), получим систему уравнений, равносильную данной:

$$\begin{cases}x=\dfrac{4-2y}{a-4},\\(a-4)(4-2y)+4ay=16,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}x=\dfrac{4-2y}{a-4},\\(a+4)y=16-2a.\end{cases} \qquad (3)$$

Поскольку $a+4$ равно нулю при $a=-4$, $16-2a$ равно нулю при $a=8$, то при $a=-4$ второе уравнение системы (3) решений не имеет. Следовательно, исходная система также не имеет решений.

При $a\neq\pm 4$ имеем:

$$y=\frac{16-2a}{a+4},$$

а, следовательно,

$$x=\frac{4-2\cdot\dfrac{16-2a}{a+4}}{a-4}=\frac{4a+16-32+4a}{(a-4)(a+4)}=$$

$$=\frac{8(a-2)}{(a-4)(a+4)}.$$

Ответ. При $a=\pm 4$ решений нет; при $a\in(-\infty;-4)\cup(-4;4)\cup(4;+\infty)$ $x=\dfrac{8a-16}{a^2-16}$, $y=\dfrac{16-2a}{a+4}$.

Пример 14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}ax+y=2,\\3x+y=3.\end{cases}$$

Решение

Вычтем из второго уравнения системы первое, получим:

$$(3-a)x=1.$$

Теперь нам предстоит разделить обе части полученного уравнения на $3-a$. Но выражение $3-a$ при $a=3$ равно нулю; при всех других значениях a оно отлично от нуля. Итак, возможны два случая.

Случай 1. $a\neq 3$. Тогда

$$x=\frac{1}{3-a}$$

и из второго уравнения системы имеем:

$$3\cdot\frac{1}{3-a}+y=3,\quad y=\frac{3(2-a)}{3-a}.$$

Случай 2. $a=3$. Тогда исходная система принимает вид:

$$\begin{cases}3x+y=2,\\3x+y=3.\end{cases}$$

Эта система решений не имеет.

Ответ. При $a=3$ решений нет; при $a\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$ $x=\dfrac{1}{3-a}$, $y=\dfrac{6-3a}{3-a}$.

Пример 15. Решите систему

$$\begin{cases}ax+a^2y=2,\\x+(a-2)y=a.\end{cases} \qquad (1)$$

Решение

Пусть $a=0$, тогда заданная система принимает вид:

$$\begin{cases}0x+0y=2,\\x+y=0.\end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) решений не имеет.

Пусть $a\neq 0$. Умножим обе части второго уравнения системы (1) на $-a$, получим систему

$$\begin{cases}ax+a^2y=2,\\-ax-a(a-2)y=-a^2.\end{cases} \qquad (3)$$

Сложим почленно уравнения системы (3) и заменим найденной суммой второе уравнение системы (1). Получим систему, равносильную системе (1):

$$\begin{cases}ax+a^2y=2,\\2ay=2-a^2.\end{cases} \qquad (4)$$

Из второго уравнения системы (4) имеем:

$$y=\frac{2-a^2}{2a}. \qquad (5)$$

Из первого уравнения системы (4) имеем:

$$x=\frac{2-a^2y}{a}. \qquad (6)$$

Подставим (5) в (6), получим:

$$x=\frac{2-a^2\cdot\dfrac{2-a^2}{2a}}{a}=\frac{2-\dfrac{2a+a^3}{2}}{a}=$$

$$=\frac{4-2a-a^3}{2a}.$$

Ответ. При $a=0$ решений нет; при $a\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ $x=\frac{4-2a-a^3}{2a}$, $y=\frac{2-a^2}{2a}$.

Пример 16 ([1], в. 7, 14). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}x+y=a,\\2x-y=3\end{cases}$$

имеет решения и всякое решение удовлетворяет неравенству $x>y$.

Решение

Сложим почленно уравнения системы, получим:

$$3x=a+3,$$

откуда

$$x=\frac{a+3}{3}.$$

Подставим это значение в первое уравнение системы. Имеем:

$$\frac{a+3}{3}+y=a,$$

откуда

$$y=\frac{2a-3}{3}.$$

Теперь решим неравенство $x>y$, то есть

$$\frac{a+3}{3}>\frac{2a-3}{3},$$

$$a+3>2a-3,\quad a<6.$$

Ответ. При $a\in(-\infty;6)$.

Литература

1. *ЕГЭ* 2016. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2 / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий и др.; под ред. И. В. Ященко. — М. : Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2016. — 215, [1] с. (Серия «ЕГЭ. 30 вариантов. Типовые тестовые задания»).
2. *Сефибеков С. Р.* Психолого-педагогические условия развития математического образования школьников в инновационной школьной среде: монография. — Н. Новгород : НИУ РАНХ и ГС, 2014. — 172 с.
3. *Сефибеков С. Р.* Организация элективного курса по математике в средней школе: методические рекомендации для педагогов. — Н. Новгород : НИУ РАНХ и ГС, 2014. — 35 с.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

В курсе алгебры 8 класса рассматривается единственный пример квадратного уравнения с параметром (*[1], пример 2, с. 142*). В связи с этим, полезно ознакомить учащихся 9–11-х классов с данной темой на кружковых и элективных занятиях. Это будет для них хорошей подготовкой для сдачи ЕГЭ.

Приведём известные теоретические сведения о квадратном уравнении:

1. Уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0\,, \qquad (*)$$

где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причём $a\neq 0$, называется квадратным.

2. Формула корней уравнения (*) имеет вид:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\,,$$

где $D=b^2-4ac$ называется дискриминантом квадратного уравнения или квадратного трёхчлена ax^2+bx+c.

3. Если квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет корни $x=x_1$ и $x=x_2$, то он разлагается на множители:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

4. Число корней уравнения (*):
1) если $D<0$, то уравнение не имеет корней;
2) если $D>0$, то уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\,;$$

если коэффициент b — чётное число $(b=2k)$, то более удобной является формула:

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}\,,$$

где

$$D_1=k^2-ac\,;\ D_1=\frac{D}{4}\,;$$

3) если $D=0$, то уравнение имеет два равных корня $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$, тогда

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2\,. \qquad (**)$$

В этом случае говорят, что уравнение (*) имеет одно решение и корень $x_1=-\frac{b}{2a}$ в разложении (**) называется двукратным корнем.

5. Для уравнения (*), имеющего корни x_1 и x_2, имеют место следующие соотношения (формулы Виета):

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}; \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$$

6. Уравнение $x^2+px+q=0$, в котором первый коэффициент равен единице $(a=1)$, называется приведённым.

В дальнейшем в уравнении (*) числа a, b и c будем называть параметрами.

Рассмотрим теперь уравнение $ax^2+bx+c=0$ с параметрами a, b, c. Одной из распространённых ошибок при решении такого типа уравнений является то, что учащиеся считают их квадратными, забывая при этом, что если коэффициент a при переменной x может оказаться равным нулю, то уравнение превращается в линейное и может иметь одно решение.

Пример 1. При каких значениях a уравнение $(a-4)x^2+16x-2=0$ имеет единственное решение?

Решение

. Если $a-4=0$, $a=4$, то имеем линейное уравнение: $16x-2=0$, откуда $x=\frac{1}{8}$.

. Если $a\neq4$, то данное уравнение — квадратное. Требование задачи — условие:

$$D_1=0\Leftrightarrow\ 64+2(a-4)=0\Leftrightarrow\ a=-28.$$

Ответ. При $a=-28$ и $a=4$.

Пример 2. Найдите все значения a, при каж-м из которых уравнение $x^2-2ax+2a-1=0$ еет ровно два различных корня. ([2], 14.9)

Решение

Должно выполняться условие:

$$D_1>0\Leftrightarrow a^2-(2a-1)>0\Leftrightarrow$$

$$a^2-2a+1>0\Leftrightarrow(a-1)^2>0\Leftrightarrow a\neq1.$$

Ответ. $a\neq1$.

Пример 3. Найдите все значения a, при каждом которых уравнение $(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$ имеет корней. ([2], 14.11)

Решение

. Если $a-2=0$, $a=2$, то $2=0$ (ложно). Значит, уравнение корней не имеет.

. Если $a\neq2$, то должно выполняться условие:

$$D_1<0\Leftrightarrow(a-2)^2-2(a-2)<0\Leftrightarrow$$

$$(a-2)(a-4)<0\Leftrightarrow2<a<4.$$

Объединяя полученные решения, получим ıет.

Ответ. $2\leq a<4$.

Пример 4. Найдите все значения a, при ждом из которых один корень уравнения $+(2a-1)x+a^2+2=0$ вдвое больше другого.], 14.15)

Решение

По формулам Виета имеем:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-(2a-1);\\x_1\cdot x_2=a^2+2.\end{cases}$$

Допустим, что $x_1=2x_2$. Тогда имеем:

$$\begin{cases}2x_2+x_2=-(2a-1),\\2x_2\cdot x_2=a^2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_2=1-2a,\\2x_2^2=a^2+2.\end{cases}$$

Из первого уравнения находим: $x_2=\frac{1-2a}{3}$ и подставляем во второе уравнение:

$$2\cdot\left(\frac{1-2a}{3}\right)^2=a^2+2\ \Leftrightarrow\ 2\cdot\frac{1-4a+4a^2}{9}=a^2+2$$

$$\Leftrightarrow\ 0=a^2+8a+16\ \Leftrightarrow\ (a+4)^2=0\Leftrightarrow a=-4.$$

Ответ. $a=-4$.

Пример 5. Найдите все целые значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$$

не имеет корней. ([2], 14.12)

Решение

1. Если $a-2=0$, $a=2$, то $2=0$ (ложно). Значит, при $a=2$ уравнение корней не имеет.
2. Если $a\neq2$, то должно выполняться условие:

$$D_1<0,\ (a-2)^2-2(a-2)<0\Leftrightarrow$$

$$(a-2)(a-4)<0\Leftrightarrow2<a<4.$$

Интервалу $(2;4)$ принадлежит только целое число $a=3$. Значит, при $a=3$ уравнение корней не имеет.

Ответ. $a=2$, $a=3$.

Пример 6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2+2(a+1)x+(a+3)=0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 1. ([2], 14.13)

Решение

1. Пусть $a=0$, тогда уравнение принимает вид $2x+3=0$, откуда $x=-1{,}5$, то есть уравнение имеет один корень. Значит, $a\neq0$.
2. Если $a\neq0$, то уравнение имеет два корня при условии $D_1>0$:

$$(a+1)^2-a(a+3)>0\Leftrightarrow$$

$$a^2+2a+1-a^2-3a>0\Leftrightarrow$$

$$1-a>0\Leftrightarrow a<1.$$

Учитывая условие $D_1=1-a$ и $a<1$, найдём корни: $x_1=\frac{-a-1-\sqrt{D_1}}{a}$ и $x_2=\frac{-a-1+\sqrt{D_1}}{a}$.

Запишем требования задачи:

$$\begin{cases} |x_2 - x_1| > 1, \\ a < 1, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left| \dfrac{-a-1+\sqrt{D_1}}{a} - \dfrac{-a-1-\sqrt{D_1}}{a} \right| > 1, \\ a < 1, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left| \dfrac{2\sqrt{D_1}}{a} \right| > 1, \\ a < 1, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{2\sqrt{D_1}}{a} < -1, \\ \dfrac{2\sqrt{D_1}}{a} > 1, \end{array} \right. \\ a < 1, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{D_1}}{a} < -1, \\ a < 1, \\ a \neq 0; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{D_1}}{a} > 1, \\ a < 1, \\ a \neq 0. \end{cases} & (2) \end{array} \right.$$

Решим систему (1) совокупности. Если $a < 0$, то

$$\frac{2\sqrt{D_1}}{a} < -1,$$

$$2\sqrt{D_1} > -a, \ 4D_1 > a^2$$

$$(\text{т. к.} -a > 0) \ 4(1-a) > a^2 \ \Leftrightarrow$$

$$a^2 + 4a - 4 < 0 \ \Leftrightarrow$$

$$-2 - 2\sqrt{2} < a < -2 + 2\sqrt{2},$$

откуда

$$-2 - 2\sqrt{2} < a < 0.$$

Если $0 < a < 1$, то $\dfrac{2\sqrt{D_1}}{a} < -1$ — противоречие, т. к. $\dfrac{2\sqrt{D_1}}{a} > 0$ и $-1 < 0$.

Решим систему (2) совокупности.

Если $a < 0$, то $\dfrac{2\sqrt{D_1}}{a} > 1$ — противоречие, т. к. $\dfrac{2\sqrt{D_1}}{a} < 0$ и $1 > 0$.

Если $0 < a < 1$, то

$$\frac{2\sqrt{D_1}}{a} > 1, \ 2\sqrt{D_1} > a,$$

$$4D_1 > a^2, \ 4(1-a) > a^2,$$

$$a^2 + 4a - 4 < 0,$$

$$-2 - 2\sqrt{2} < a < -2 + 2\sqrt{2},$$

откуда

$$0 < a < -2 + 2\sqrt{2} \ (\text{т. к. } -2 + 2\sqrt{2} < 1).$$

Объединяя полученные решения, получим ответ.

Ответ. $-2 - 2\sqrt{2} < a < 0, \ 0 < a < -2 + 2\sqrt{2}$.

Пример 7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ имеет два корня, сумма которых равна нулю. ([2], 14.14)

Решение

Чтобы уравнение имело два корня, должно быть выполнено условие:

$$D_1 = a^2 - 2a + 1 > 0 = (a-1)^2 > 0, \text{ т. е. } a \neq 1.$$

Корни уравнения:

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{(a-1)^2} = a \pm |a-1|,$$

$$x_1 = a + a - 1 = 2a - 1. \ x_2 = a - a + 1 = 1.$$

По условию $x_1+x_2=1+2a-1=2a=0$, откуда $a=0$ и $0>1$ — ложно!

При $a=0$ данное уравнение сводится к виду: $x^2-1=0$, $x^2=1$, откуда

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=1 \end{array}\right. \text{ и } x_1+x_2=-1+1=0.$$

Ответ. $a=0$.

Пример 8. При каких значениях a уравнение $-2(a-3)x+a^2-7a+6=0$:

1) не имеет корней;
2) имеет корни;
3) имеет один корень;
4) имеет два корня;
5) имеет положительные корни;
6) имеет отрицательные корни;
7) имеет корни разного знака, то есть один положительный, а другой — отрицательный;
8) имеет один из корней, равный нулю?

Решение

1) Должно быть выполнено условие:

$$D_1<0,$$

$$D_1=(a-3)^2-a^2+7a-6=a+3<0,$$

$$a<-3.$$

2) Должно быть выполнено условие:

$$D_1\ge 0,\ a+3\ge 0,$$

$$a\ge -3.$$

3) Принято считать совпадающие корни как одно решение, тогда условие их существования $D_1=0$ или $a=-3$.

4) Должно выполняться условие: $D_1>0$, то есть $a>-3$;

5) Должно выполняться условие:

$$\begin{cases} D_1\ge 0, \\ x_1+x_2=2(a-3)>0, \Leftrightarrow \\ x_1\cdot x_2=a^2-7a+6>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\ge -3, \\ a>3, \Leftrightarrow \\ \left[\begin{array}{l} a<1, \\ a>6 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>3, \\ a<1, \end{cases} \\ \begin{cases} a>3, \\ a>6 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow a>6.$$

Если в условии будет сказано «имеет два положительных корня», то в системе следует заменить $D_1\ge 0$ на $D_1>0$.

6) Должно выполняться условие:

$$\begin{cases} D_1\ge 0, \\ x_1+x_2=2(a-3)<0, \quad \Leftrightarrow \\ x_1\cdot x_2=a^2-7a+6>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\ge -3, \\ a<3, \quad \Leftrightarrow \\ \left[\begin{array}{l} a<1, \\ a>6 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\ge -3, \\ a<3, \\ a<1, \end{cases} \\ \begin{cases} a\ge -3, \\ a<3, \\ a>6 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$-3\le a<1.$$

7) Должно выполняться условие:

$$\begin{cases} D_1>0, \\ x_1\cdot x_2=a^2-7a+6<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a>-3, \\ 1<a<6 \end{cases} \Leftrightarrow 1<a<6 \Rightarrow 1<a<6.$$

8) Должно выполняться условие — равенство нулю свободного члена уравнения, то есть

$$a^2-7a+6=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1, \\ a=6. \end{array}\right.$$

Пример 9. При каком a сумма квадратов корней уравнения $x^2-(a+3)x+a-2=0$ принимает наименьшее значение?

Решение

Так как дискриминант

$$D=(a+3)^2-4(a-2)=a^2+2a+17=(a+1)^2+16>0$$

при всех $a\in\mathbb{R}$, то уравнение имеет корни.

Пусть корни уравнения x_1 и x_2. Имеем:

$$x_1+x_2=a+3,$$

$$x_1\cdot x_2=a-2,$$

Далее, используя теорему Виета, получим

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,$$

$$x_1^2+x_2^2=(a+3)^2-2(a-2),$$

$$x_1^2+x_2^2=a^2+4a+13=(a+2)^2+9.$$

Очевидно, что $x_1^2+x_2^2$ принимает наименьшее значение, когда $(a+2)^2=0$, т. е. при $a=-2$.

Ответ. При $a=-2$.

Пример 10. При каких значениях a уравнение

$$(a^2-4a+3)x^2+(a^2-9)x+(a^2-8a+15)=0$$

имеет более двух корней?

Решение

Если $a^2-4a+3\neq 0$, то данное уравнение квадратное и имеет не более двух корней.

Если

$$a^2-4a+3=0 \text{ (при } a=1 \text{ и } a=3\text{)},$$

то уравнение $(a^2-9)x+(a^2-8a+15)=0$ — линейное.

Оно будет иметь бесконечное множество корней, если:

$$\begin{cases} a^2-9=0, \\ a^2-8a+15=0, \\ a^2-4a+3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-3, \\ a=3, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a=3, \\ a=5, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a=1, \\ a=3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a=3.$$

Ответ. При $a=3$.

Пример 11. Решите уравнение

$$ax^2+(a+2014)x+2014=0.$$

Решение

1) Если $a=0$, то уравнение сводится к линейному: $2014x+2014=0$, откуда $x=-1$.
2) Если $a\neq 0$, то уравнение — квадратное. Решение этого уравнения непосредственно по формуле корней квадратного приводит к вычислительным трудностям.

Если же заметить, что

$$a-(a+2014)+2014=0,$$

откуда следует, что $x_1=-1$ является корнем уравнения, тогда по теореме Виета

$$x_2=\frac{2014}{ax_1}=-\frac{2014}{a}.$$

Ответ. При $a=0$, $x=-1$; при $a\neq 0$, $x_1=-1$,

$$x_2=-\frac{2014}{a}.$$

Пример 12. Решите уравнение

$$\frac{x^2+ax+a^2}{x^2-ax+a^2}=\frac{a^2}{x^2}.$$

Решение

ОДЗ: $x^2-ax+a^2\neq 0$, $x\neq 0$.

1) Если $a=0$, то уравнение примет вид:

$$\frac{x^2}{x^2}=\frac{0}{x^2}$$

или, учитывая ОДЗ, $1=0$ (ложно). Значит, при $a=0$ уравнение решений не имеет.

2) Пусть $a\neq 0$, тогда дискриминант квадратного трёхчлена x^2-ax+a^2,

$$D=a^2-4a^2=-3a^2<0$$

при любом $a\neq 0$.

Так как

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}\Leftrightarrow\frac{m+n}{m-n}=\frac{p+q}{p-q},$$

то уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{2(x^2+a^2)}{2ax}=\frac{x^2+a^2}{a^2-x^2}$$

или

$$x^2+ax-a^2=0,$$

Откуда

$$x_{1,2} = \frac{-a\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}.$$

Ответ. При $a=0$ корней нет; при $a \neq 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-a\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}.$$

Пример 13. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов корней квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8$ принимает наименьшее значение. ([2], 14.17)

Решение

Квадратный трёхчлен имеет корни, если дискриминант

$$D_1 = a^2 - \left(2a^2 - 6a + 8\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-a^2 + 6a - 8 \geq 0,$$

$$a^2 - 6a + 8 \leq 0,\ 2 \leq a \leq 4. \qquad (*)$$

Пусть x_1 и x_2 — корни заданного квадратного трёхчлена.

Имеем:

$$x_1 + x_2 = 2a,$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2a^2 - 6a + 8.$$

Далее,

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 4a^2 - 4a^2 + 12a - 16,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 12a - 16.$$

Функция $q(a) = 12a - 16$ — линейная и возрастающая, т. к. $k = 12 > 0$.

Тогда функция принимает наименьшее значение в точке $a = 2$ (см. (*)).

Ответ. $a = 2$.

СВОЙСТВА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА

Для решения квадратных уравнений с параметрами важно очень хорошо знать свойства корней квадратного трёхчлена и использовать их, а также уметь мыслить геометрически, то есть давать геометрическую интерпретацию на графике.

Напомним, что квадратным трёхчленом называется выражение: $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

Графиком квадратного трёхчлена является парабола.

$$D = b^2 - 4ac$$

называется дискриминантом квадратного трёхчлена.

Теорема 1. Если $D < 0$, то $f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ имеет тот же знак, что и его старший коэффициент a.

Доказательство

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right),\ \text{т. е.}$$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right). \qquad (1)$$

Так как $D < 0$, то $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

В силу этого $f(x)$ имеет то же знак, что и коэффициент a.

Доказанная теорема имеет следующий геометрический смысл.

Если $D < 0$, то график $f(x)$ (парабола) целиком расположен в верхней полуплоскости (т. е. в полуплоскости, в которой ординаты положительны), когда $a > 0$, и в нижней полуплоскости (т. е. в полуплоскости, в которой ординаты отрицательны), когда $a < 0$ (*рис. 1 и 2*).

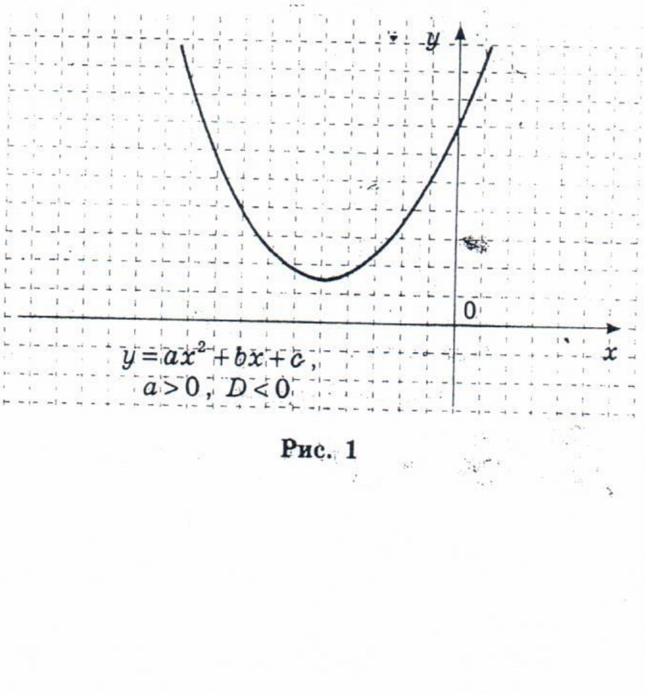


Рис. 1

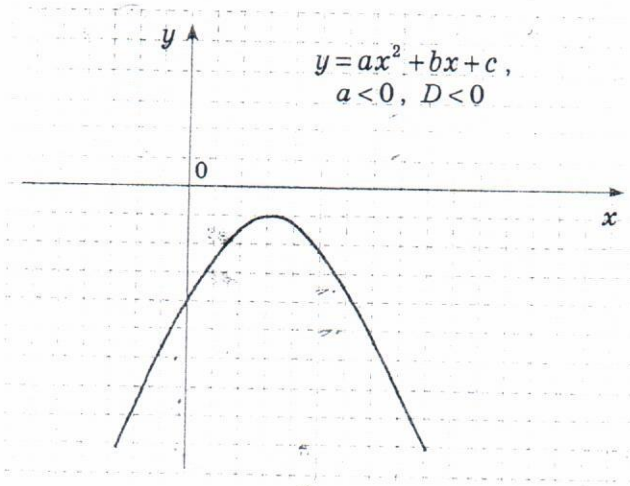


Рис. 2

Теорема 2. Если $D=0$, то $f(x)=0$ при $x=-\frac{b}{2a}$, а при всех $x\neq-\frac{b}{2a}$ $f(x)$ имеет тот же знак, что a — его старший коэффициент.

Доказательство

При $D=0$ равенство (1) примет вид:

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Выражение

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

равно нулю при $x=-\frac{b}{2a}$, а при $x\neq-\frac{b}{2a}$ $f(x)$ имеет тот же знак, что и a.

Доказанная теорема имеет следующий геометрический смысл.

Если $D=0$, то график $f(x)$ (парабола) касается оси Ox в точке $x=-\frac{b}{2a}$ и расположен в верхней полуплоскости, когда $a>0$, и в нижней полуплоскости, когда $a<0$ (*рис. 3 и 4*).

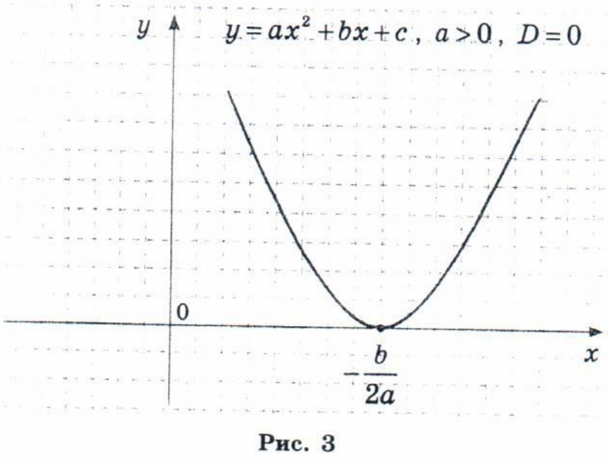


Рис. 3

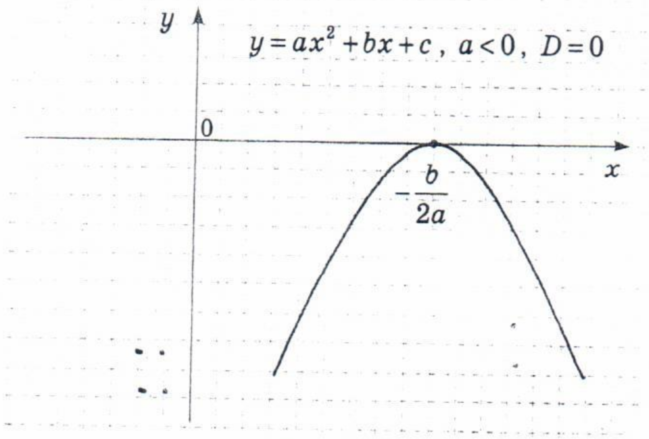


Рис. 4

Теорема 3. Если $D>0$, то $f(x)=0$ в двух различных точках $x=x_1$ и $x=x_2$. Во всех точках, лежащих вне промежутка (x_1,x_2), $f(x)$ имеет знак своего старшего коэффициента a, а во всех точках внутри этого промежутка имеет знак, противоположный знаку старшего коэффициента a.

Доказательство

Разложим квадратный трёхчлен $f(x)$ на множители:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \qquad (2)$$

(по условию $x=x_1$, $x=x_2$ — корни трёхчлена $f(x)$).

$$f(x)=0 \text{ при } x=x_1 \text{ и } x=x_2,\ x_1\neq x_2.$$

Пусть $x_1<x_2$. Выясним сначала знак трёхчлена $f(x)$ вне промежутка (x_1,x_2), т. е. при $x<x_1$ или $x>x_2$.

Если $x<x_1$, то $x<x_2$ и произведение $(x-x_1)(x-x_2)$ положительно.

Значит, правая часть равенства (2) имеет тот же знак, что и коэффициент a.

Если $x>x_2$, то $x>x_1$ и произведение $(x-x_1)(x-x_2)$ опять положительно и правая часть равенства (2) опять имеет тот же знак, что и коэффициент a.

Осталось проверить, какой знак имеет трёхчлен $f(x)$ при x, лежащем внутри промежутка между корнями x_1 и x_2.

Пусть $x_1<x<x_2$. Тогда $x-x_1>0$, а $x-x_2<0$, произведение $(x-x_1)(x-x_2)$ отрицательно, а правая часть равенства (2) имеет знак, противоположный знаку коэффициента a.

Доказанная теорема имеет следующий геометрический смысл.

Если дискриминант квадратного трёхчлена положителен, его график пересекает ось Ox в двух точках. Если при этом старший коэффициент трёхчлена положителен, график трёхчлена (парабола), за исключением дуги, отсекаемой осью Ox, лежит в верхней полуплоскости. Если же старший коэффициент трёхчлена отрицателен, график его, за исключением дуги, отсекаемой осью Ox, лежит в нижней полуплоскости (рис. 5 и 6).

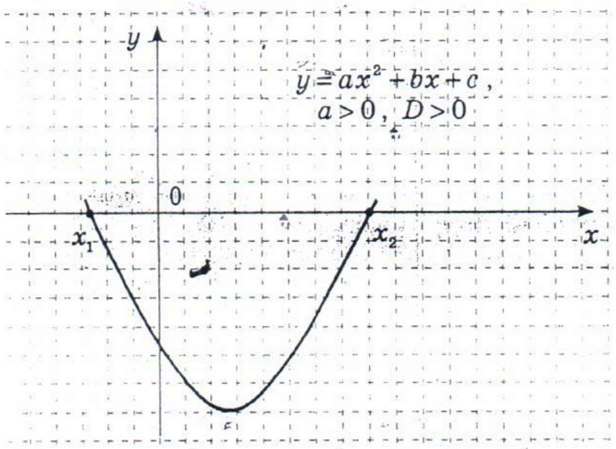


Рис. 5

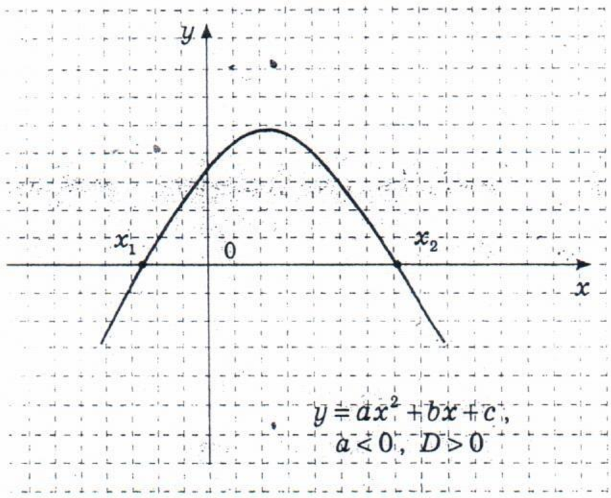


Рис. 6

Знаки корней квадратного трёхчлена исследуются с помощью теоремы Виета. Для этого используются следующие теоремы.

Теорема 4. Для того чтобы корни x_1 и x_2 квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ имели одинаковые знаки, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:

$D = b^2 - 4ac \geq 0$;

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} > 0$.

Доказательство

Чтобы существовали два корня (возможность их совпадения не исключается: при $D = 0$, $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$, (*см. рис. 3 и 4*), необходимо и достаточно выполнение условия: $D \geq 0$.

Корни x_1 и x_2 имеют одинаковые знаки тогда и только тогда, когда $x_1 \cdot x_2 > 0$ или по теореме Виета $c \cdot a > 0$.

Оба корня будут положительными, если дополнительно наложить условие

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0;$$

оба корня будут отрицательными, если

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0.$$

Теорема 5. Для того чтобы корни x_1 и x_2 квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ имели разные знаки, необходимо и достаточно выполнение соотношений:

1) $D = b^2 - 4ac > 0$;

2) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} < 0$.

При этом положительный корень будет иметь больший модуль, если

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0.$$

Если же

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0,$$

то отрицательный корень будет иметь больший модуль.

Доказательство такое же, как и в теореме 4. Заметим, что условие $D = b^2 - 4ac > 0$ является следствием неравенства $\dfrac{c}{a} < 0$.

Дадим второе доказательство. Если

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

то условие теоремы равносильно совокупности двух систем (*см. рис. 5 и 6*);

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ f(0) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ f(0) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0,\\ c<0,\end{cases}\\ \begin{cases}a<0,\\ c>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$ac<0 \Leftrightarrow -4ac>0 \Leftrightarrow b^2-4ac>0 .$$

При втором доказательстве теоремы 5 мы воспользовались следующим свойством непрерывных функций: непрерывная и не обращающаяся в нуль на интервале $(a;b)$ функция сохраняет на нём постоянный знак. Непосредственным следствием этого утверждения является следующая теорема.

Теорема 6 (Больцано–Коши). **Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b найдётся точка c, в которой функция обращается в нуль:**

$$f(c)=0 \quad (a<c<b).$$

(*Доказательство этой теоремы приводится в полных курсах математического анализа*).

Теорема 6 имеет простой геометрический смысл: если непрерывная кривая переходит с одной полуплоскости относительно оси Ox на другую, то она пересекает эту ось (*рис. 7*).

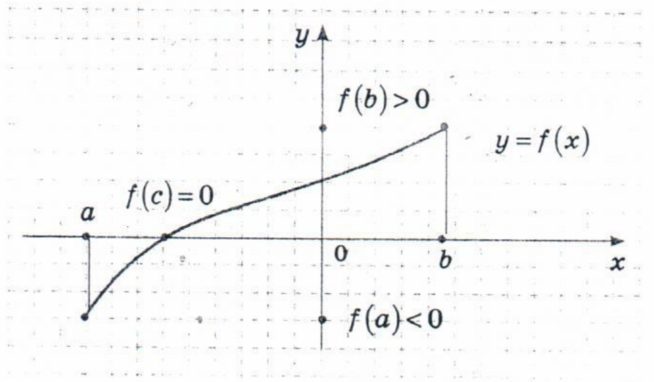


Рис. 7

Предлагаем читателям обосновать этот способ доказательства с использованием теоремы 6.

Пример 14. **Выясните знаки параметров a, b и c, если график функции**

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

имеет вид, изображённый:

1) на рис. 5;
2) на рис. 6.

Решение

1) Так как ветви направлены вверх, то $a>0$.

Так как парабола пересекает ось Oy в точке $(0;c)$, то $c<0$.

Так как вершина параболы расположена в правой полуплоскости, то $x_0>0$, где x_0 — абсцисса вершины.

Значит,

$$x_0=-\frac{b}{2a}>0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}<0 \Leftrightarrow b<0 \ (\text{т. к. } a>0).$$

Ответ. $a>0$, $b<0$, $c<0$.

2) Так как ветви направлены вниз, то $a<0$.

Так как парабола пересекает ось Oy в точке $(0;c)$, то $c>0$.

Так как вершина параболы расположена в правой полуплоскости $x_0>0$,

$$x_0=-\frac{b}{2a}>0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}<0 \Leftrightarrow b>0 \ (\text{т. к. } a<0).$$

Ответ. $a<0$, $b>0$, $c>0$.

Пример 15. **При каких значениях параметра a корни уравнения $(a-1)x^2-2ax+a+3=0$ положительны?**

Решение

Способ 1

1) При $a=1$ уравнение принимает вид:

$$-2x+4=0 \Leftrightarrow x=2>0 .$$

2) При $a\neq 1$, так как уравнение имеет корни, $D\geq 0$.

По теореме 4

$$\begin{cases}x_1+x_2>0,\\ x_1\cdot x_2>0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}D_1\geq 0,\\ x_1+x_2>0,\\ x_1\cdot x_2>0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}a^2-(a-1)(a+3)\geq 0,\\ \dfrac{2a}{a-1}>0,\\ \dfrac{a+3}{a-1}>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-2a+3\geq 0,\\ a(a-1)>0,\\ (a+3)(a-1)>0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a \le \dfrac{3}{2}, \\ a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty), \\ a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$a \in (-\infty; -3) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right].$$

Ответ. При $a = 1$; $a < -3$; $1 < a \le \dfrac{3}{2}$.

Способ 2

1) $a = 1$ — одно из искомых значений.

2) Разделим обе части уравнения на $a - 1 \ne 0$ при $a \ne 1$:

$$x^2 - \frac{2a}{a-1} + \frac{a+3}{a-1} = 0.$$

Рассмотрим квадратный трёхчлен:

$$f(x) = x^2 - \frac{2a}{a-1}x + \frac{a+3}{a-1}. \qquad (*)$$

Графиком этого квадратного трёхчлена является парабола, ветви которой направлены вверх. Так как $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то график находится в правой полуплоскости (*рис. 8*).

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ f(0) > 0, \\ x_0 = -\dfrac{b}{2a} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2a + 3 \ge 0, \\ \dfrac{a+3}{a-1} > 0, \\ \dfrac{2a}{a-1} > 0. \end{cases}$$

Далее — способ 1 решения.

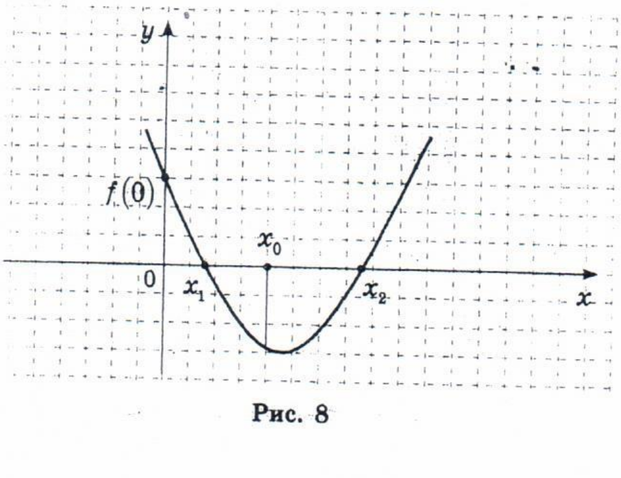


Рис. 8

Способ 3

При $x \in (-\infty; x_0]$ (где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$) функция $f(x)$ (см. (*)) убывающая (*рис. 8*). Тогда при $x \in (-\infty; x_0)$ $f'(x) < 0$ и $f'(0) = -\dfrac{2a}{a-1} < 0$. Отсюда имеем:

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ f(0) > 0, \\ -\dfrac{2a}{a-1} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 3 \ge 0, \\ \dfrac{a+3}{a-1} > 0, \\ \dfrac{2a}{a-1} > 0. \end{cases}$$

Далее — способ 1 решения.

Пример 16. При каких значениях a корни уравнения

$$(a-2)x^2 + x + (a-3)(a^2+1) = 0$$

имеют противоположные знаки?

Решение

По условию уравнение должно иметь два корня: $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$. Поэтому $a - 2 \ne 0$, $a \ne 2$.

Отсюда

$$x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(a-3)(a^2+1)}{a-2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a-3}{a-2} < 0$$

(т. к. $a^2 + 1 > 0$ $\Leftrightarrow$ $(a-3)(a-2) < 0$), $a \in (2; 3)$.

Теперь проверим будет ли дискриминант уравнения положительным при $a \in (2; 3)$ (иначе уравнение корней не имеет):

$$D = 1 - 4(a-2)(a-3)(a^2+1) > 0,$$

так как

$$a - 2 > 0, \; a^2 + 1 > 0 \text{ и } a - 3 < 0.$$

Ответ. При $a \in (2; 3)$.

Пример 17. Найдите значения a, при которых оба корня уравнения $(a-2)x^2 - ax + 2 = 0$ положительны.

Решение

По условию уравнение должно иметь два корня $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, т.е. должно быть квадратным. Тогда $a - 2 \ne 0$, $a \ne 2$.

Имеем систему:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - 8(a-2) \geq 0, \\ \dfrac{a}{a-2} > 0, \\ \dfrac{2}{a-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a-4)^2 \geq 0, \\ a(a-2) > 0, \\ a - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ a > 0, \\ a > 2 \end{cases} \Rightarrow a \in (2; +\infty).$$

Ответ. $a \in (2; +\infty)$.

Пример 18. **Найдите значения a, при которых оба корня уравнения $x^2 - (a+2)x + 2a - 3 = 0$ отрицательны.**

Решение

Пусть $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$ — корни уравнения. По условию:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (a+2)^2 - 4(2a-3) \geq 0, \\ a + 2 < 0, \\ 2a - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a-2)^2 + 12 > 0, \\ a < -2, \\ a > \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Система неравенств решений не имеет.

Ответ. Таких значений a не существует.

Мы рассмотрели примеры, когда корни квадратного трёхчлена располагались на числовой оси относительно нуля (по одну сторону и по разные стороны). Если в примере расположение корней ограничивается числом, не равным нулю, то применять формулы теоремы Виета нельзя. Тогда используются теоремы о расположении корней.

Пусть квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и x_2, а x_0 — какое-нибудь число ($x_0 \neq 0$).

Рассмотрим следующие теоремы.

Теорема 7. **Чтобы оба корня квадратного трёхчлена были меньше, чем число x_0 (то есть лежали на координатной прямой левее, чем точка x_0), необходимо и достаточно выполнение условий:**

1) Рис. 9.

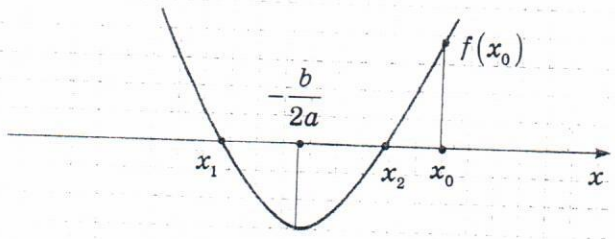


Рис. 9

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < x_0, \\ f(x_0) > 0. \end{cases}$$

2) Рис. 10.

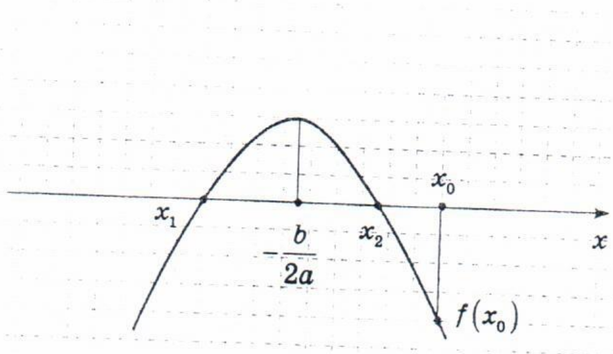


Рис. 10

$$\begin{cases} a<0, \\ D\geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a}<x_0, \\ f(x_0)<0. \end{cases}$$

Теорема 8. Чтобы один из корней квадратного трёхчлена был меньше, чем число x_0, а другой — больше числа x_0 (то есть точка x_0 лежала бы между корнями), необходимо и достаточно выполнение условий:

) Рис. 11.

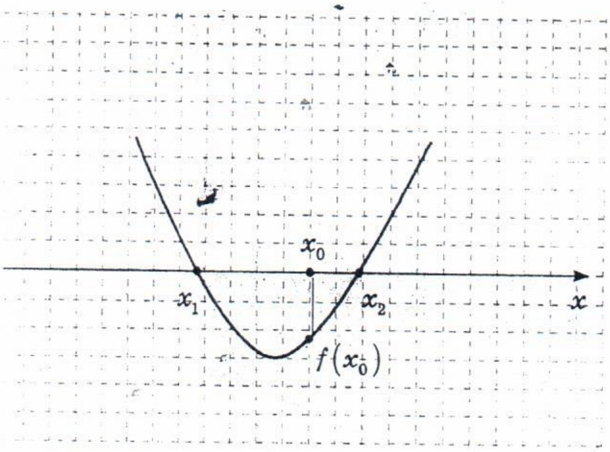


Рис. 11

$$\begin{cases} a>0, \\ f(x_0)<0. \end{cases}$$

Рис. 12.

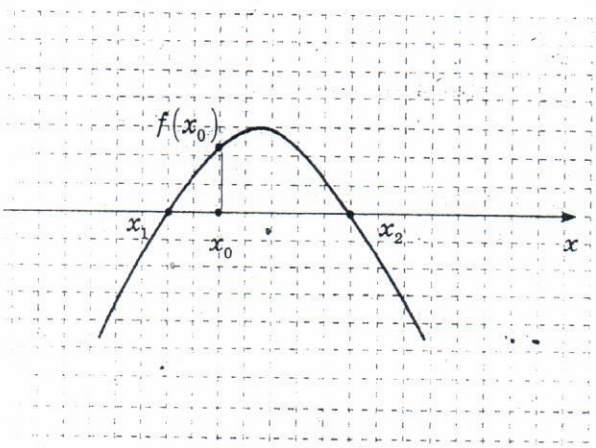


Рис. 12

$$\begin{cases} a<0, \\ f(x_0)>0. \end{cases}$$

Теорема 9. Чтобы оба корня квадратного трёхчлена были больше, чем число x_0 (то есть лежали на координатной прямой правее, чем точка x_0), необходимо и достаточно выполнение условий:

1) Рис. 13.

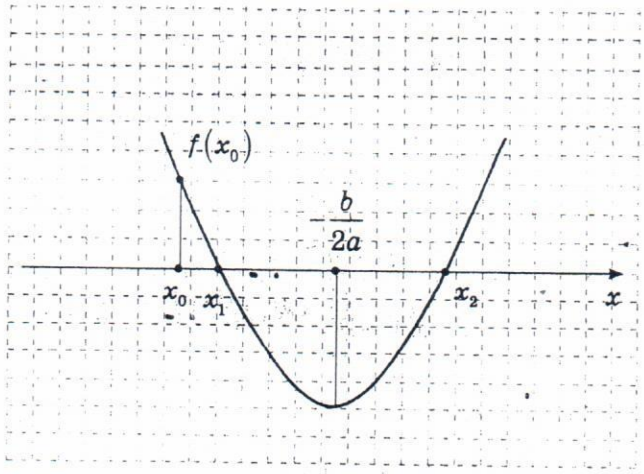


Рис. 13

$$\begin{cases} a>0, \\ D\geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a}>x_0, \\ f(x_0)>0 \end{cases}$$

2) Рис. 14.

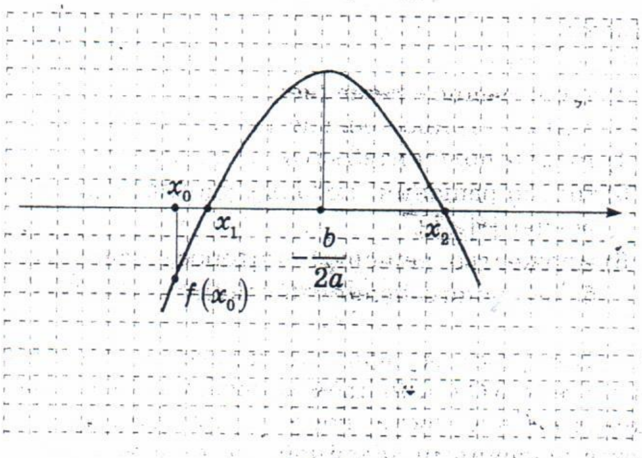


Рис. 14

$$\begin{cases} a<0, \\ D\geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a}>x_0, \\ f(x_0)<0 \end{cases}$$

Следствие 1. Чтобы оба корня квадратного трёхчлена были больше, чем число A, но меньше, чем число B $(A<B)$, то есть лежали между A и B, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) Рис. 15.

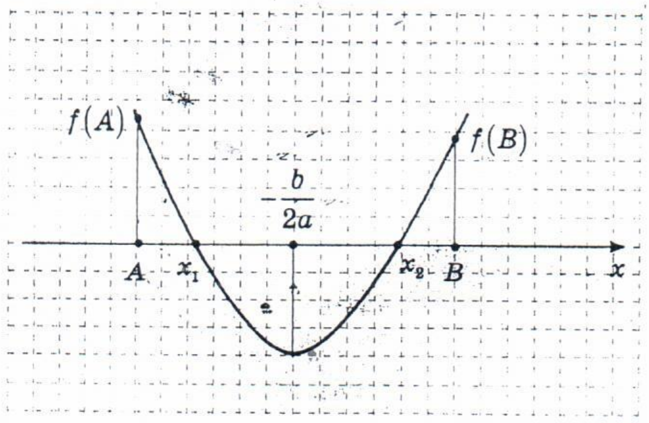


Рис. 15

$$\begin{cases} a>0, \\ D\geq 0, \\ f(A)>0, \\ f(B)>0, \\ A<-\dfrac{b}{2a}<B. \end{cases}$$

2) Рис. 16.

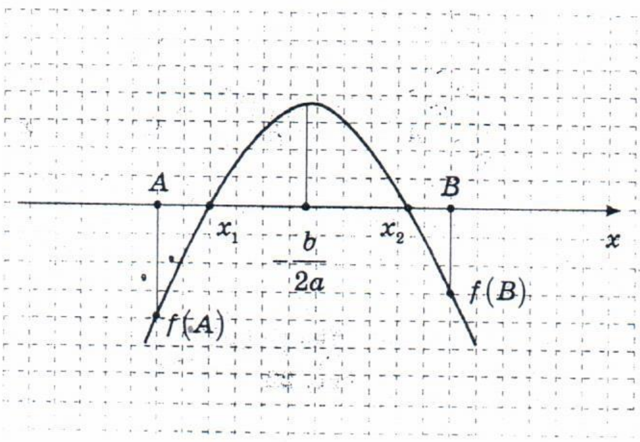


Рис. 16

$$\begin{cases} a<0, \\ D\geq 0, \\ f(A)<0, \\ f(B)<0, \\ A<-\dfrac{b}{2a}<B. \end{cases}$$

Следствие 2. Чтобы только больший корень квадратного трёхчлена лежал в интервале между точками A и B $(A<B)$, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) Рис. 17.

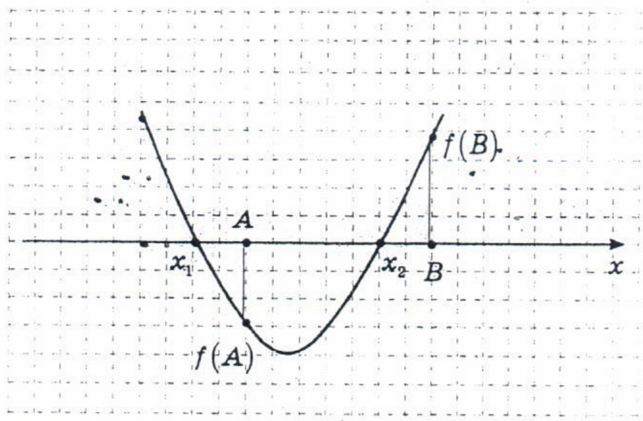


Рис. 17

$$\begin{cases} a>0, \\ af(A)<0, \\ af(B)>0. \end{cases}$$

2) Рис. 18.

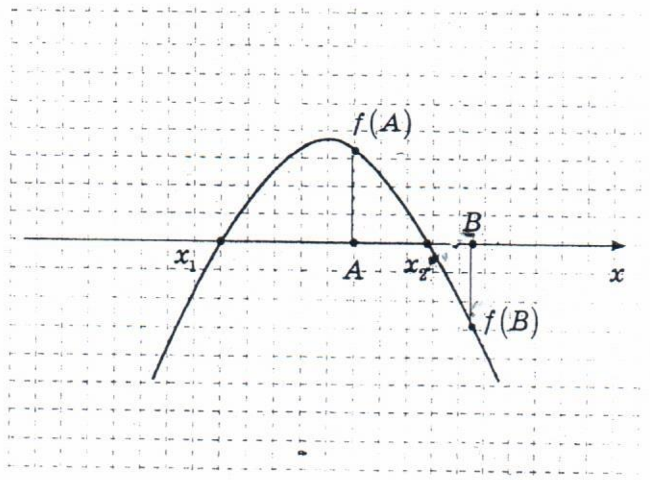


Рис. 18

$$\begin{cases} a<0, \\ af(A)<0, \\ af(B)>0. \end{cases}$$

Следствие 3. Чтобы только меньший корень квадратного трёхчлена лежал в интервале между точками A и B $(A<B)$, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) Рис. 19.

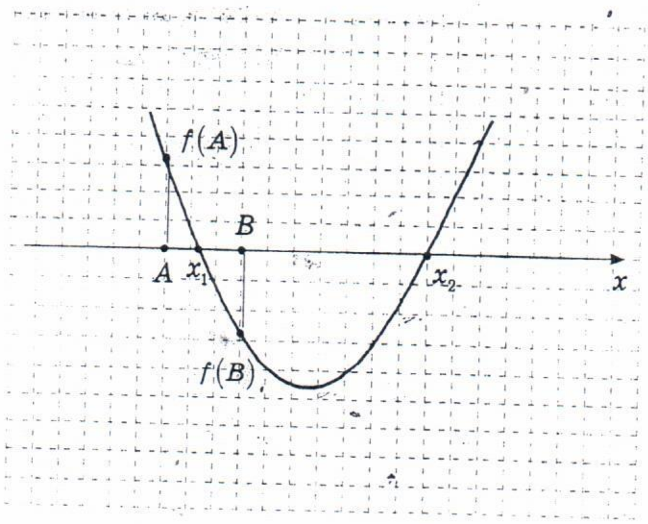


Рис. 19

$$\begin{cases} a>0, \\ af(A)>0, \\ af(B)<0. \end{cases}$$

2) Рис. 20.

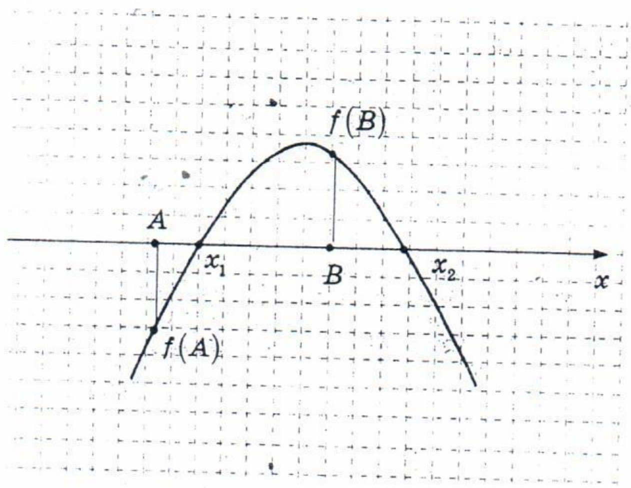


Рис. 20

$$\begin{cases} a<0, \\ af(A)>0, \\ af(B)<0. \end{cases}$$

Следствие 4. Чтобы один корень квадратного трёхчлена был меньше, чем A, а второй — больше, чем B $(A<B)$, то есть отрезок AB целиком лежал внутри интервала между корнями, необходимо и достаточно выполнение овий:

1) Рис. 21.

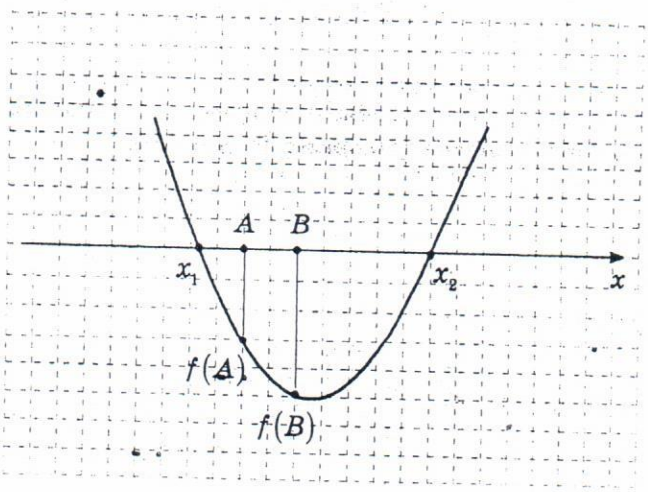


Рис. 21

$$\begin{cases} a>0, \\ af(A)<0, \\ af(B)<0. \end{cases}$$

2) Рис. 22.

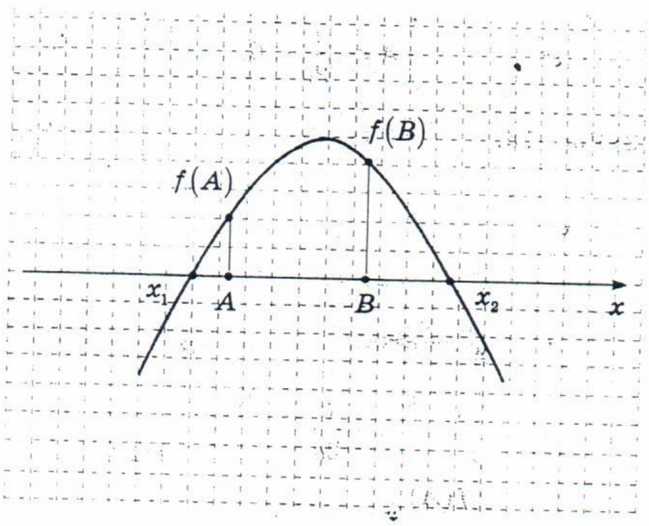


Рис. 22

$$\begin{cases} a<0, \\ af(A)<0, \\ af(B)<0. \end{cases}$$

Рассмотренные теоремы и следствия часто применяют при решении задач с параметрами. Поэтому важно начинать решение таких задач с изображения эскиза графика квадратного трёхчлена — параболы.

Пример 19. При каком значении a корни уравнения $x^2+(a-2)a+4a+1=0$ больше 5?

Решение

Чтобы оба корня были больше 5, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись неравенства (*теорема 9; рис. 23*):

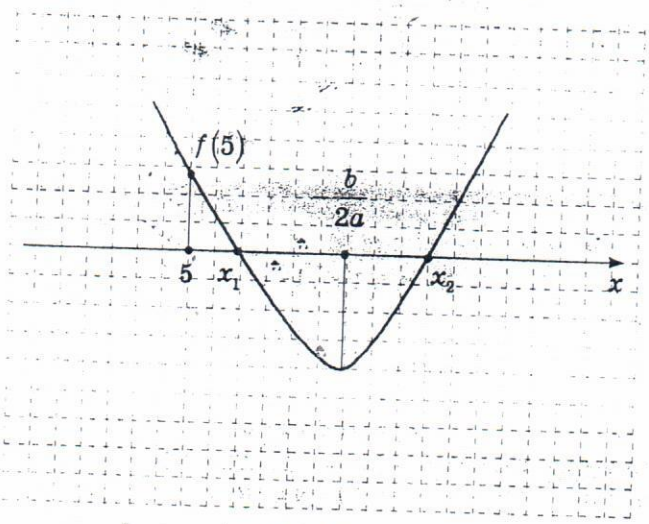


Рис. 23

$$\begin{cases} D\ge 0, \\ f(5)>0, \\ -\frac{b}{2a}>5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (a-2)^2-4(4a+1)\ge 0, \\ 25+(a-2)\cdot 5+4a+1>0, \\ -\frac{a-2}{2}>5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a\in(-\infty;0]\cup[20;+\infty) \\ a>-\frac{16}{9}, \\ a<-8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a\in(-\infty;0]\cup[20;+\infty) \\ a>-\frac{16}{9}, \\ a<-8. \end{cases}$$

Система неравенств решений не имеет.

Ответ. Таких значений a не существует.

Пример 20. При каком значении a корни уравнения $x^2+(a-2)a+4a+1=0$ меньше 5?

Решение

Чтобы оба корня были меньше 5, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись неравенства (*теорема 7; рис. 24*):

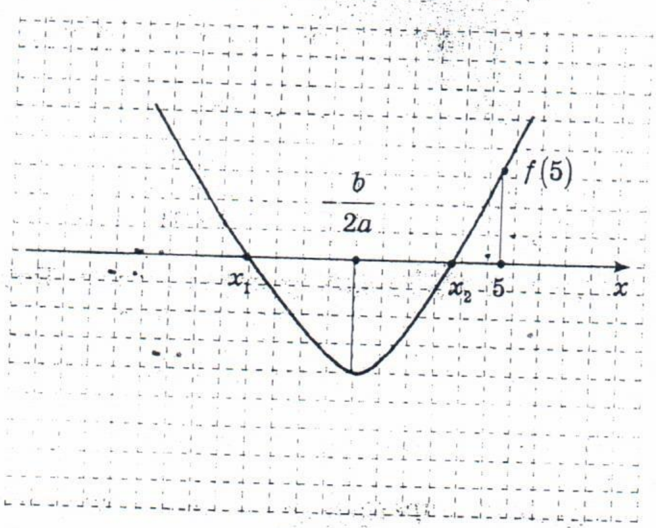


Рис. 24

$$\begin{cases} D\ge 0, \\ -\frac{b}{2a}<5, \\ f(5)>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a\in(-\infty;0]\cup[20;+\infty), \\ a>-\frac{16}{9}, \\ a>-8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a\in(-\infty;0]\cup[20;+\infty), \\ a>-\frac{16}{9} \end{cases} \Rightarrow$$

$$a\in\left(-\frac{16}{9};0\right]\cup[20;+\infty).$$

Ответ. При $a\in\left(-\frac{16}{9};0\right]\cup[20;+\infty)$.

Пример 21. Найти все значения a, при которых корни уравнения

$$(a-1)x^2-2(a+1)x+a-3=0$$

принадлежат интервалу $(-1;5)$.

Решение

1. Если $a=1$, то уравнение примет вид:

$$-4x-2=0,$$

откуда

$$x=-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\in(-1;5).$$

2. Если $a>1$, то $a-1>0$. Имеем систему (*следствие 1; рис. 25*):

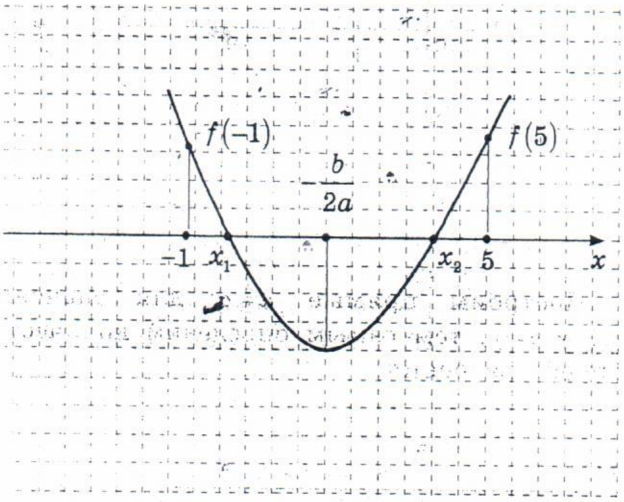


Рис. 25

$$\begin{cases} D_1\ge 0, \\ f(-1)>0, \\ f(5)>0, \\ -1<-\dfrac{b}{2a}<5 \\ a>1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} (a+1)^2-(a+1)(a-3)\ge 0, \\ (a-1)+2(a+1)+a-3>0, \\ 25(a-1)-10(a+1)+a-3>0, \\ -1<\dfrac{a+1}{a-1}<5, \\ a>1 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a\ge -1, \\ a>\dfrac{1}{2}, \\ a>\dfrac{19}{8}, \\ -a+1<a+1<5a-5, \\ a>1 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a>\dfrac{19}{8}, \\ -a+1<a+1<5a-5 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a>\dfrac{19}{8}, \\ 1<2a+1<6a-5 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a>\dfrac{19}{8}, \\ 0<2a<6a-6 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a>\dfrac{19}{8}, \\ a>\dfrac{3}{2} \end{cases}\Rightarrow a>\frac{19}{8}.$$

3. Если $a<1$, то $a-1<0$. Имеем систему (*следствие 1; рис. 26*).

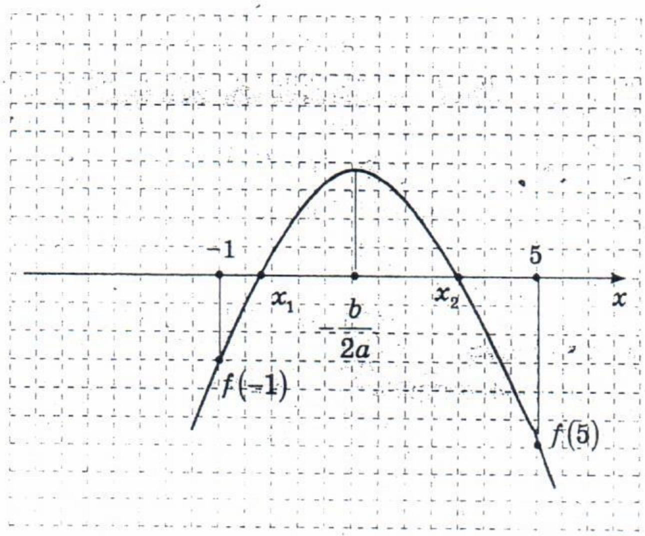


Рис. 26

$$\begin{cases} D_1\ge 0, \\ f(-1)<0, \\ f(5)<0, \\ -1<-\dfrac{b}{2a}<5, \\ a<1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a\ge -1, \\ a<\dfrac{1}{2}, \\ a<\dfrac{19}{8}, \\ -1<\dfrac{a+3}{a-1}<5, \\ a<1 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -1\le a<\dfrac{1}{2}, \\ -1<\dfrac{a+3}{a-1}<5 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -1\le a<\dfrac{1}{2}, \\ -a+1>a+3>5a-5 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-1\le a<\dfrac{1}{2},\\ 5a-5<a+3<-a+1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-1\le a<\dfrac{1}{2},\\ 5a-8<a<-a-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-1\le a<\dfrac{1}{2},\\ a<-1.\end{cases}$$

Система неравенств не имеет решений.

Объединяя полученные решения, получим ответ.

Ответ. $a=1$; $a>\dfrac{19}{8}$.

Пример 22. При каких значениях a один корень уравнения $(a-5)x^2-2ax+a-4=0$ меньше 1, а другой — больше 2?

Решение

По условию $a-5\ne 0$ $(a\ne 5)$.

Тогда:

1) если $a-5>0$ (следствие 4), то

$$\begin{cases}(a-5)\cdot f(1)<0,\\ (a-5)\cdot f(2)<0,\\ a-5>0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}f(1)<0,\\ f(2)<0,\\ a>5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-9<0\,(\text{истинно}),\\ (a-5)(a-24)<0,\\ a>5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}5<a<24,\\ a>5\end{cases}\Rightarrow a\in(5;24);$$

2) если $a-5<0$ (*следствие 4*), то

$$\begin{cases}(a-5)\cdot f(1)<0,\\ (a-5)\cdot f(2)<0,\\ a-5<0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}f(1)>0,\\ f(2)>0,\\ a<5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-9>0\,(\text{ложно}),\\ a>24,\\ a<5.\end{cases}$$

Система решений не имеет.

Ответ. При $a\in(5;24)$.

Пример 23. При каких значениях a один корень уравнения $2x^2-4x+a=0$ принадлежит промежутку $(-3;3)$?

Решение

Изобразим эскиз параболы $f(x)=2x^2-4x+a$ (*рис. 27*); $a=2>0$ ветви направлены вверх; координаты вершины:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\cdot 2}=1,$$

$$y_0=f(1)=2-4+a=a-2,$$

вершина — $M(1;a-2)$. Точка M может лежать на оси Ox, когда $a-2=0$, $a=2$.

При $a\ne 2$, т. е. при $a-2<0$, точка M окажется ниже оси Ox. При $a=2$ уравнение будет иметь два равных корня $x_1=x_2$, а при $a\ne 2$ корни не равны: $x_1\ne x_2$. Отсюда имеем систему:

$$\begin{cases}a-2\le 0,\\ f(-3)>0,\\ f(3)>0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a\le 2,\\ a+30>0,\\ a+6>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\le 2,\\ a>-30,\\ a>-6\end{cases}\Rightarrow$$

$$-6<a\le 2;\ x_1;x_2\in(-3;3).$$

Ответ. При $a\in(-6;2]$.

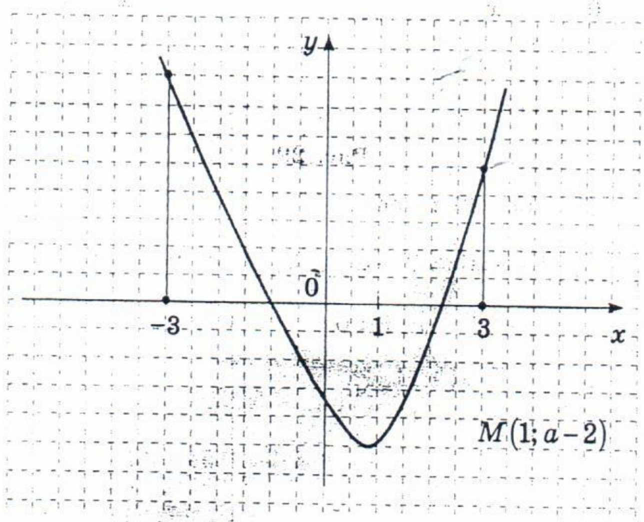


Рис. 27

Пример 24. При каких значениях a уравнение $x^2+2(a-2)x+a+6=0$ имеет хотя бы один положительный корень?

Решение

Ветви параболы $f(x)=2(a-x^2)x+a+6$ направлены вверх.

$$x_0=-\frac{2(a-2)}{2}=2-a;$$

$$D_1=(a-2)^2-(a+6)=a^2-4a+4-a-6=$$

$$a^2-5a-2=\left(a-\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(a-\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right).$$

Задаче удовлетворяют только случаи, изображённые на рис. 28 и 29:

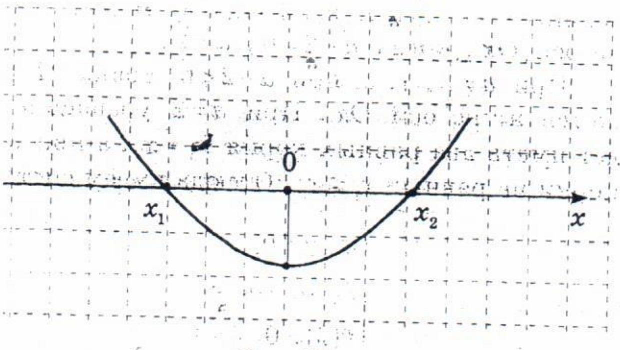


Рис. 28

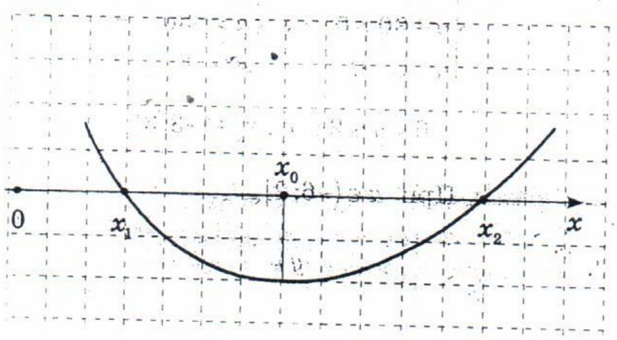


Рис. 29

По рис. 28 имеем:

$$f(0)<0 \Leftrightarrow 0^2-2(a-2)\cdot 0+a-6<0 \Leftrightarrow$$

$$a+6<0 \Leftrightarrow a<-6.$$

По рис. 29 имеем:

$$\begin{cases} D_1\ge 0, \\ x_0>0, \\ f(0)\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(a-\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(a-\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)\ge 0, \\ 2-a>0, \\ a+6\ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a\le\frac{5-\sqrt{33}}{2}, \\ a\ge\frac{5+\sqrt{33}}{2}, \end{array}\right. \\ a<2, \\ a\ge -6 \end{cases} \Rightarrow -6\le a\le\frac{5-\sqrt{33}}{2}.$$

Объединим полученные решения:

$$\left[\begin{array}{l} a<-6, \\ -6\le a\le\frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow a\le\frac{5-\sqrt{33}}{2}.$$

Ответ. При $a\in\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right]$.

Пример 25. Найдите все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2-6x+12+a^2-4a=0$ принимает наибольшее значение. (*[2], тренировочная работа 14, № 18*)

Решение

Изобразим эскиз параболы

$$f(x)=x^2-6x+12+a^2-4a \text{ (рис. 30)}.$$

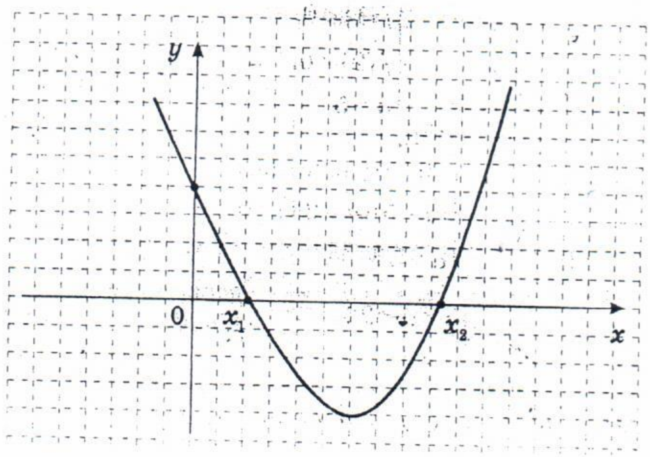


Рис. 30

Имеем:

$$\begin{cases} D_1>0, \\ f(0)>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 9-12-a^2+4a>0, \\ a^2-4a+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2-4a+3<0, \\ (a-2)^2+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a-1)(a-3)<0, \\ a\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow\ 1<a<3. \qquad (*)$$

x_1 и x_2 — корни уравнения:

$$x_1=3-\sqrt{D_1},\ x_2=3+\sqrt{D_1},$$

где

$$D_1=-a^2+4a-3=-(a-2)^2+1.$$

Тогда

$$|x_1-x_2|=\left|3-\sqrt{D_1}-3-\sqrt{D_1}\right|=$$

$$=\left|-2\sqrt{D_1}\right|=2\sqrt{D_1}=2\sqrt{-(a-2)^2+1},$$

где $a\in(1;3)$ (см. (*)).

Следовательно, наибольшее значение

$$|x_1-x_2|=2$$

при

$$a=2.$$

Ответ. $a=2$.

Литература

1. *Алгебра.* 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю. Н. Макарычев и др.], под ред. С. А. Теляковского. — 18-е изд. — М. : Просвещение, 2010.— 271 с.: ил.
2. *ЕГЭ* 2016. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2 / И. В. Ященко, М. А. Волкевич, И. Р. Высоцкий и др.; под ред. И. В. Ященко.— М. : Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2016. — 215, [1] с. (серия «ЕГЭ. 30 вариантов. Типовые тестовые задания»).
3. *Сефибеков С. Р.* Внеклассная работа по математике: Книга для учителя.— М. : Просвещение, 1988.

■

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

При решении иррациональных уравнений и неравенств с параметром сохраняются все теоретические положения решения таких задач без параметра. Напомним эти теоретические положения.

- Иррациональным уравнением называется такое уравнение, в котором над неизвестным наряду с другими операциями совершается операция извлечения корня.
- Корни чётной степени, входящие в уравнение, понимаются в арифметическом смысле, а у корней нечётной степени рассматривается их единственное значение. Поэтому, например, уравнение: $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt[4]{3x-1}=-1$ не имеет решений, так как при любом допустимом значении переменной x (т. е. значений x из ОДЗ уравнения) левая часть неотрицательна, а его правая часть отрицательная.
- Иррациональные уравнения часто решаются с помощью возведения обеих частей уравнения в одну и ту же натуральную степень. При возведении обеих частей уравнения в нечётную степень получается уравнение, равносильное исходному. При возведении обеих частей уравнения в чётную степень, могут появиться посторонние корни, поэтому в этом случае необходима проверка полученных корней (подставив их на место переменной в исходное уравнение), т. е. проверка является частью решения.

Но иррациональные уравнения можно решить и без проверки, если использовать следующие равносильные переходы ($n\in\mathbb{N}$):

уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)}=q(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} q(x)\ge 0, \\ f(x)=\left(q(x)\right)^{2n}; \end{cases}$$

уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{q(x)}$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x)=q(x), \\ f(x)\ge 0\,(\text{или}\; q(x)\ge 0). \end{cases}$$

Здесь удобно из неравенств $f(x)\ge 0$ или $q(x)\ge 0$ рассматривать то неравенство, в котором функция ($f(x)$ или $q(x)$) представлена простым аналитическим выражением.

4. Если в любом иррациональном уравнении заменить знак равенства на один из знаков неравенства: $>, \ge, <, \le$, то получим иррациональное неравенство. Обычно решение иррационального неравенства сводят к решению равносильной ему совокупности рациональных систем неравенств.

Эти системы получаются при наложении ограничений на неизвестное и возведение обеих частей неравенства в степень.

Приведём следующие равносильные замены ($n\in\mathbb{N}$):

$$1)\ \sqrt[2n]{f(x)}<q(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ q(x)>0, \\ f(x)<\left(q(x)\right)^{2n}; \end{cases}$$

$$2)\ \sqrt[2n]{f(x)}>q(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ q(x)<0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ q(x)\ge 0, \\ f(x)>\left(q(x)\right)^{2n} \end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \qquad (*)$$

$$\underset{\substack{\text{первое неравенство}\\ \text{в системе (*) можно опустить}}}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ q(x)<0, \end{cases} \\ \begin{cases} q(x)\ge 0, \\ f(x)>\left(q(x)\right)^{2n}; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$3)\ \sqrt[2n]{f(x)}>\sqrt[2n]{q(x)}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)>0, \\ q(x)\ge 0, \\ f(x)>q(x); \end{cases}$$

$$4)\ \sqrt[2n]{f(x)}<\sqrt[2n]{q(x)}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ q(x)>0, \\ f(x)<q(x). \end{cases}$$

Обсудим, например, замену 1) (замены 2)–4) предлагаем читателю разобрать самостоятельно):

1) ОДЗ: $f(x)\geq 0$.
2) При $q(x)\leq 0$ неравенство решений не имеет, так как $\sqrt[2n]{f(x)}\geq 0$. Значит, можно сразу потребовать выполнение условия $q(x)>0$.
3) При $f(x)\geq 0$ и $q(x)>0$ обе части неравенства неотрицательны, значит, возведя их в $2n$-ю степень, получим неравенство $f(x)<(q(x))^{2n}$, равносильное данному.

Таким образом, равносильная замена 1) доказана.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-ax+a}=x-1.$$

Решение

$$\sqrt{x^2-ax+a}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\geq 0,\\ x^2-ax+a=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\geq 1,\\ x^2-ax+a=x^2-2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1, & (1)\\ (2-a)x=1-a. & (2)\end{cases}$$

1) Если $a=2$, то уравнение (2) приводится к виду: $0\cdot x=1$, откуда имеем, что корней уравнение не имеет.
2) Если $a\neq 2$, то $x=\dfrac{1-a}{2-a}$.
3) Находим a, при которых выполняется неравенство (1):

$$\begin{cases}\dfrac{1-a}{2-a}\geq 1,\\ a\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1-a}{2-a}-1\geq 0,\\ a\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1-a-2+a}{2-a}\geq 0,\\ a\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{-1}{2-a}\geq 0,\\ a\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-a<0,\\ a\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>2,\\ a\neq 2\end{cases}\Rightarrow a\in(2;+\infty).$$

Ответ. $x=\dfrac{1-a}{2-a}$ при $a\in(2;+\infty)$; корней нет при $a\in(-\infty;2]$.

Пример 2. Решите уравнение

$$2x+2ax+\sqrt{x}=0.$$

Решение

ОДЗ: $x\geq 0$.

Пусть $\sqrt{x}=t$, $t\geq 0$. Тогда $x=t^2$ и уравнение примет вид: $(2+2a)t^2+t=0$. (*)

Если $2+2a=0\Leftrightarrow a=-1$, то

$$0\cdot t^2+t=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0.$$

Значит, при $a=-1$ $x=0$.

Если $2+2a\neq 0\Leftrightarrow a\neq -1$, то уравнение (*) — квадратное. Дискриминант $D=1$, корни

$$t=\frac{-1\pm 1}{2(2+2a)},$$

$$t_1=0 \text{ и } t_2=-\frac{1}{2+2a};$$

$$t_2\geq 0\Rightarrow -\frac{1}{2+2a}\geq 0\Leftrightarrow 2+2a<0\Leftrightarrow a<-1.$$

Значит, при $a<-1$

$$t=0\Rightarrow\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0;$$

$$t_2=\sqrt{x}=-\frac{1}{2+2a}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4(a+1)^2}.$$

При

$$t_2<0\Rightarrow -\frac{1}{2+2a}<0\Leftrightarrow 2+2a>0\Leftrightarrow a>-1$$

корней нет.

Ответ. При $a=-1$ $x=0$; при $a<-1$ $x=0$ и $x=\dfrac{1}{4(a+1)^2}$; при $a>-1$ корней нет.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{x-a}=x-1$.

Решение

$$\sqrt{x-a}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\geq 0,\\ x-a=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\geq 1,\\ x-a=x^2-2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1, & (1)\\ x^2-3x+a+1=0. & (2)\end{cases}$$

Дискриминант уравнения (2)

$$D=9-4a-4=5-4a,$$

корни:

$$x_1=\frac{3-\sqrt{5-4a}}{2},$$

$$x_2=\frac{3+\sqrt{5-4a}}{2}.$$

Если $D<0$, то есть при $a>\dfrac{5}{4}$ корней нет.

Если $D \ge 0 \Rightarrow 5-4a \ge 0 \Leftrightarrow a \le \frac{5}{4}$, то корни x_1 и x_2 должны удовлетворять неравенству (1):

$$x_1 \ge 1 \Rightarrow \frac{3-\sqrt{5-4a}}{2} \ge 1 \Leftrightarrow 3-\sqrt{5-4a} \ge 2 \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{5-4a} \ge -1 \Leftrightarrow \sqrt{5-4a} \le 1 \Leftrightarrow$$

$$5-4a \le 1 \Leftrightarrow -4a \le -4 \Leftrightarrow a \ge 1.$$

Из условий $a \ge 1$ и $a \le \frac{5}{4}$ следует:

$$1 \le a \le \frac{5}{4}.$$

Значит, при $1 \le a \le \frac{5}{4}$ уравнение имеет корень x_1.

$$x_2 \ge 1 \Rightarrow \frac{3+\sqrt{5-4a}}{2} \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{5-4a} \ge -1 \text{ —}$$

что справедливо при $a \le \frac{5}{4}$. Значит, при $a \le \frac{5}{4}$ уравнение имеет корень x_2.

Ответ. $x = \frac{3 \pm \sqrt{5-4a}}{2}$, если

$$1 \le a \le \frac{5}{4};\; x = \frac{3+\sqrt{5-4a}}{2},$$

и $a<1$; корней нет, если $a > \frac{5}{4}$.

Пример 4. Решите уравнение $(x-2)\sqrt{x-a}=0$.

Решение

ОДЗ: $x-a \ge 0$, $x \ge a$. (*)

$$(x-2)\sqrt{x-a}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ \sqrt{x-a}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=a \end{array}\right.$$

Если $a=2$, то $x_1=x_2=2$.

Если $a<2$, то $x_1=2$ удовлетворяет условию (*): $2 \ge a$. Значит, $x_1=2$ — корень уравнения при $a<2$.

Если $a>2$, то x_1 не удовлетворяет условию (*): $2 \ge a$. Значит, $x_1=2$ не является корнем уравнения при $a>2$.

Ответ. Если $a<2$, то $x_1=2$, $x_2=a$; если $a \ge 2$, то $x=a$.

Пример 5. Решите уравнение

$$\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{x-2} = a.$$

Решение

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x-1 \ge 0, \\ x-2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2}, \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$$

Так как левая часть данного уравнения неотрицательна, то $a \ge 0$.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} (2x-1)(x-2)=a^2, \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2-a^2=0, \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{5-\sqrt{8a^2+9}}{4}, \\ x=\frac{5+\sqrt{8a^2+9}}{4} \end{array}\right. \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{5-\sqrt{8a^2+9}}{4}, \\ x \ge 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{5+\sqrt{8a^2+9}}{4}, \\ x \ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x=\frac{5+\sqrt{8a^2+9}}{4} \end{array}\right.$$

то есть

$$x=\frac{5+\sqrt{8a^2+9}}{4}.$$

Ответ. При $a \ge 0$ $x=\frac{5+\sqrt{8a^2+9}}{4}$; при $a<0$ корней нет.

Пример 6. Решите уравнение

$$\sqrt{2x-1}-a=\sqrt{x-2}.$$

Решение

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-2}=a.$$

ОДЗ: $x \ge 2$.

Так как $\sqrt{2x-1} > \sqrt{x-2}$, то $a>0$.

Пусть $\sqrt{x-2}=t$, $t \ge 0$. Тогда $x=t^2+2$ и исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sqrt{2t^2+3}-t=a, \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2t^2+3}=t+a, \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2t^2+3=(t+a)^2, \\ t+a\ge 0, \\ t\ge 0, \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-2at+3-a^2=0, \\ t+a\ge 0, \\ t\ge 0, \\ a>0. \end{cases}$$

Решим в полученной системе квадратное уравнение.

Дискриминант $D_1=2a^2-3$, корни

$$t_1=a-\sqrt{2a^2-3},$$

$$t_2=a+\sqrt{2a^2-3}.$$

Чтобы корни t_1 и t_2 существовали, должны быть выполнены условия:

$$\begin{cases} 2a^2-3\ge 0, \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2\ge \dfrac{3}{2}, \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a\ge \dfrac{\sqrt{6}}{2}, \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow a\ge \frac{\sqrt{6}}{2}. \qquad (1)$$

Так как $t\ge 0$, то $t_2>0$ при любом $a\ge \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Найдём значения параметра a, при которых $t_1\ge 0$.

$$a-\sqrt{2a^2-3}\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{2a^2-3}\le a \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a>0, \\ 2a^2-3\le a^2, \\ a\ge \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2}\le a\le \sqrt{3}.$$

Таким образом, при $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\le a\le\sqrt{3}$

$$t_1=a-\sqrt{2a^2-3},$$

$$t_2=a+\sqrt{2a^2-3};$$

при $a>\sqrt{3}$

$$t=a+\sqrt{2a^2-3}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{x-2}=a-\sqrt{2a^2-3} \Rightarrow$$

$$x=\left(a-\sqrt{2a^2-3}\right)^2+2=3a^2-2a\sqrt{2a^2-3}-1;$$

$$\sqrt{x-2}=a+\sqrt{2a^2-3} \Rightarrow$$

$$x=\left(a+\sqrt{2a^2-3}\right)^2+2=3a^2+2a\sqrt{2a^2-3}-1.$$

Ответ. При $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\le a\le\sqrt{3}$

$$x_1=3a^2-2a\sqrt{2a^2-3}-1$$

и

$$x_2=3a^2+2a\sqrt{2a^2-3}-1;$$

при

$$a>\sqrt{3}$$

$$x=3a^2+2a\sqrt{2a^2-3}-1;$$

при

$$a\in\left(-\infty;\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$ корней нет.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+14-8\sqrt{x-2}}=a.$$

Решение

Пусть

$$\sqrt{x-2}=t;\ t\ge 0;\ x-2=t^2.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{t^2+9-6t}+\sqrt{t^2+16-8t}=a,$$

$$\sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(t-4)^2}=a,\ |t-3|+|t-4|=a. \qquad (*)$$

Учитывая, что модули обращаются в нуль в точках $t=3$ и $t=4$, а также $t\ge 0$, изобразим ось t.

Раскроем модули в уравнении (*) в каждом из полученных промежутков:

1) $\begin{cases} 0\le t\le 3, \\ -t+3-t+4=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 3, \\ a=7-2t \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 0\le\sqrt{x-2}\le 3, \\ a=7-2\sqrt{x-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\le x\le 11, \\ 1\le a\le 7; \end{cases} \qquad (1)$$

2) $\begin{cases} 3<t<4, \\ t-3-t+4=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3<t<4, \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 3<\sqrt{x-2}<4, \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9<x-2<16, \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11<x<18, \\ a=1; \end{cases} \qquad (2)$$

3) $\begin{cases} t \ge 4, \\ t-3+t-4=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 4, \\ a=2t-7 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \sqrt{x-2} \ge 4, \\ a=2\sqrt{x-2}-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 18, \\ a \ge 1. \end{cases}$ (3)

Учитывая системы (1)–(3), запишем ответ.

Ответ. При $1 \le a \le 7$ $2 \le x \le 11$; при $a=1$ $11 < x < 18$; при $a \ge 1$ $x \ge 18$.

Пример 8. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения из примера 7 принадлежат отрезку $[3; 27]$.

Решение

Из решения примера 7 имеем:

$$\begin{cases} 2 \le x \le 11, \\ a=7-2\sqrt{x-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3, \\ a=5 \end{cases} (см.\ 1)).$$

$$\begin{cases} x \ge 18, \\ a=2\sqrt{x-2}-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=27, \\ a=3 \end{cases} (см.\ 3)).$$

Ответ. $a \in [3; 5]$.

Пример 9. Решите уравнение

$$\sqrt{a-x}=\sqrt{-x}+\sqrt{a}.$$

Решение

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a-x \ge 0, \\ -x \ge 0, \\ a \ge 0, \\ a-x=-x+2\sqrt{-xa}+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le a, \\ x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \le a, \\ x \le 0, \\ -xa=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le a, \\ x \le 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ a=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le a, \\ x \le 0, \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le a, \\ x \le 0, \\ a=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le a, \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0, \\ a=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ge 0, \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0, \\ a=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. При $a \ge 0$ $x=0$; при $a=0$ $x \le 0$; при $a<0$ корней нет.

Пример 10. Решите уравнение

$$(x-a)\sqrt{x}-(x+a)\sqrt{a}=a\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right).$$

Решение

ОДЗ: $x \ge 0$.

Если $a<0$, то корней нет, т. к. $\sqrt{a}$ не имеет смысла.

Если $a=0$, то имеем: $x\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$.

Пусть $a>0$. Раскроем скобки в левой части уравнения, перенесём все члены в одну сторону и представим полученное выражение в виде произведения:

$$x\sqrt{x}-a\sqrt{x}-x\sqrt{a}-a\sqrt{a}-a\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)=0;$$

$$x\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)-a\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)-a\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)=0;$$

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)(x-a)-a\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)=0;$$

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)-a\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)=0;$$

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)-a\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)=0;$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\left(\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)^2-a\right)=0;$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\left(x-2\sqrt{ax}+a-a\right)=0;$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\left(x-2\sqrt{ax}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}+\sqrt{a}=0, \\ x-2\sqrt{ax}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$x-2\sqrt{ax}=0$$

$$x=2\sqrt{ax} \Leftrightarrow x^2=4ax \Leftrightarrow x^2-4ax=0.$$

Корни уравнения: $x_1=0$, $x_2=4a$.

Проверим ОДЗ: $0 \ge 0$ — верно, $4a \ge 0$ верно, т. к. $a>0$.

Ответ. При $a<0$ корней нет; при $a=0$ $x=0$; при $a>0$ $x_1=0$, $x_2=4a$.

Пример 11. Решите уравнение

$$\sqrt{a-\sqrt{a-x}}=x.$$

Решение

Если $a=0$, то $\sqrt{-\sqrt{x}}=x \Leftrightarrow x=0$.

Если $a<0$, то корней нет, т.к. $a-\sqrt{a+x}<0$ и левая часть уравнения не имеет смысла.

Пусть $a>0$ и $\sqrt{a+x}=t$, $t \ge 0$. Тогда получим иррациональную систему:

$$\begin{cases}\sqrt{a+x}=t,\\ \sqrt{a-t}=x,\\ t\ge 0,\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+x=t^2,\\ a-t=x^2,\\ t\ge 0,\\ x\ge 0\end{cases}\underset{\text{вычтем из первого уравнения второе}}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases}x+t=t^2-x^2,\\ a-t=x^2,\\ t\ge 0,\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+t)(t-x-1)=0,\\ a-t=x^2,\\ t\ge 0,\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+t=0,\\ t-x-1=0,\end{array}\right.\\ a-t=x^2,\\ t\ge 0,\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+t=0,\\ a-t=x^2,\\ t,x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}t-x-1=0,\\ a-t=x^2,\\ t\ge 0,\\ x\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}t-x=1,\\ a-t=x^2,\\ t\ge 0,\\ x\ge 0.\end{cases}$$

$$a-x=x^2+1\Leftrightarrow x^2+x-a+1=0.$$

$$D=1+4a-4=4a-3.$$

Если $D=0$, $4a-3=0\Leftrightarrow a=\frac{3}{4}>0$, то $x=-\frac{1}{2}$.

Если $D<0$, $0<a<\frac{3}{4}$, то корней нет.

Если $D>0$, $a>\frac{3}{4}$, то

$x_1=\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}$ и $x_2=\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$, $x_1<0$ — не удовлетворяет условию $x\ge 0$.

Затребуем выполнение системы:

$$\begin{cases}a>\frac{3}{4},\\ x_2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>\frac{3}{4},\\ \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>\frac{3}{4},\\ \sqrt{4a-3}-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}a>\frac{3}{4},\\ \sqrt{4a-3}\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>\frac{3}{4},\\ 4a-3\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>\frac{3}{4},\\ a\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow a\ge 1.$$

Значит, при $a\ge 1$ $x=\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$.

Объединяя выше полученные результаты, запишем ответ.

Ответ. При $a=0$ $x=0$;

при $a=\frac{3}{4}$

$$x=-\frac{1}{2};$$

при $a\ge 1$

$$x=\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2};$$

при

$$a\in(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4};1\right)$$

корней нет.

Пример 12. При каких значениях параметра k уравнение

$$3\sqrt{x+1}+1=2k-k\sqrt{x+1}$$

не имеет корней? (*[1], № 1123*)

Решение

Пусть

$$\sqrt{x+1}=y,\ y\ge 0.$$

Тогда уравнение сводится к линейному виду:

$$3y+1=2k-ky\Leftrightarrow(3+k)y=2k-1.$$

Если $3+k=0$, $k=-3$, то $0\cdot y=-7$, корней нет.

Если $k\ne-3$, то $y=\frac{2k-1}{3+k}$. Уравнение не имеет корней при

$$y<0\Rightarrow\frac{2k-1}{3+k}<0\Leftrightarrow(2k-1)(k+3)<0\Leftrightarrow$$

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)(k+3)<0\Leftrightarrow-3<k<\frac{1}{2}.$$

Объединяя полученные результаты, получим ответ.

Ответ. При $k\in\left[-3;\frac{1}{2}\right)$.

Пример 13. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{16-x}+\sqrt{a^2-x}=16+a$$

имеет единственное решение? (*[1], № 1248*)

Решение

Пусть

$$\sqrt{16-x}=t,\ t\ge 0;$$

$$\sqrt{a^2-x}=u\,,\ u\ge 0\,.$$

Тогда

$$t^2=16-x\,,\ u^2=a^2-x\,.$$

С другой стороны, левая часть уравнения неотрицательна, тогда и правая часть неотрицательна: $16+a\ge 0\Leftrightarrow a\ge -16$. Отсюда имеем рациональную систему:

$$\begin{cases} t+u=16+a,\\ t^2-u^2=16-a^2,\\ a\ge -16,\\ t\ge 0,\\ u\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u=16+a-t,\\ t^2-(16+a-t)^2=16-a^2,\\ a\ge -16,\\ t\ge 0,\\ u\ge 0.\end{cases}\qquad (*)$$

Выполнив тождественные преобразования во втором уравнении системы (*), получим линейное уравнение

$$(a+16)t=16a+136\,.$$

Если $a=-16$, то $0\cdot t=-120$ и корней нет.

Если $a\ne -16$, то $t=\dfrac{16a+136}{a+16}$; единственное решение уравнения получаем при этом t. Установим, при каких a достигается значение t, рассматривая систему:

$$\begin{cases} t\ge 0,\\ a>-16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{16a+136}{a+16}\ge 0,\\ a>-16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4a+34\ge 0,\\ a>-16\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a\ge -8{,}5,\\ a>-16\end{cases}\Leftrightarrow a\ge -8{,}5.$$

Ответ. $a\in[-8{,}5;+\infty)$.

Пример 14. Решите уравнение $a-x=\sqrt{x^2-4}$.

Решение

$$a-x=\sqrt{x^2-4}\Leftrightarrow\begin{cases} (a-x)^2=x^2-4,\\ a-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2-2ax+x^2=x^2-4,\\ x\le a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2ax=a^2+4,\\ x\le a.\end{cases}$$

Если $a=0$, то из первого уравнения имеем:

$$2\cdot 0\cdot x=0^2+4\Leftrightarrow 0\cdot x=4\,,$$

откуда имеем, что корней нет.

Если

$$a\ne 0\,,$$

то

$$x=\frac{a^2+4}{2a}\,.$$

Учитывая неравенство системы, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{a^2+4}{2a}\le a,\\ a\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{a^2-2a^2+4}{2a}\le 0,\\ a\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{a^2-4}{2a}\ge 0,\\ a\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{(a-2)(a+2)}{2a}\ge 0,\\ a\ne 0.\end{cases}$$

Решим полученную систему методом интервалов (*рис. 1*):

$$f(a)=\frac{(a-2)(a+2)}{2a}\,,$$

$$a\ne 0\,,\ f(a)\ge 0\,.$$

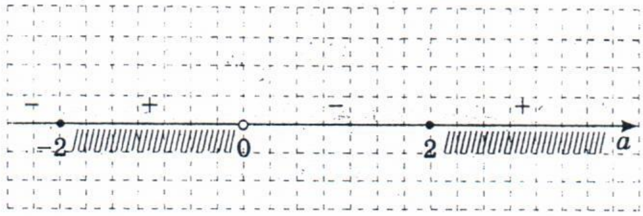


Рис. 1

$$f(a)\ge 0\,,$$

если

$$a\in[-2;0)\cup[2;+\infty)\,.$$

Значит,

$$x=\frac{a^2+4}{2a}$$

при

$$a\in[-2;0)\cup[2;+\infty)\,.$$

Ответ. При

$$a\in[-2;0)\cup[2;+\infty)\quad x=\frac{a^2+4}{2a}\,;$$

при

$$a\in(-\infty;-2)\cup[0;2)$$

корней нет.

Пример 15. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x+a+63}-\sqrt[3]{x+a-1}=4\,.$$

Решение

Пусть

$$\sqrt[3]{x+a+63}=u\,,\ u\in\mathbb{R}\,;\ \sqrt[3]{x+a-1}=t\,,\ t\in\mathbb{R}\,.$$

Тогда $u^3 = x+a+63$ и $t^3 = x+a-1$ имеем рациональную систему:

$$\begin{cases} u-t=4, \\ u^3-t^3=64 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u-t=4, \\ (u-t)(u^2-ut+t^2)=64 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u-t=4, \\ u^2+ut+t^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-t=4, \\ 3t^2+12t=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=0, \\ t=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} t=0, \\ u=4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Используя одну из выше приведенных подстановок, например, $\sqrt[3]{x+a-1}=t$, имеем: при $t=0$, $x=1-a$, при $t=-4$, $x=-63-a$.

Ответ. $x_1=1-a$, $x_2=-63-a$.

Пример 16. Решите неравенство

$$\sqrt{a^2+x^2} > x+a-2.$$

Решение

При любом значении a неравенство справедливо, если

$$x+a-2<0 \Leftrightarrow x<2-a, \qquad (1)$$

так как

$$\sqrt{a^2+x^2} \ge 0.$$

Пусть $x \ge 2-a$, тогда неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x \ge 2-a, \\ a^2-x^2 \ge (x+a-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \ge 2-a, \\ a^2+x^2 \ge x^2+a^2+4+2ax-4x-4a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \ge 2-a, & (2) \\ (2-a)x \ge 2-2a. & (3) \end{cases} \qquad (*)$$

Если

$$2-a=0,\ a=2,$$

то

$$0 \cdot x > -2$$

истинно, поэтому $x \in \mathbb{R}$.

Если $a>2$, то

$$x \le \frac{2-2a}{2-a},\ x \le \frac{2a-2}{a-2}. \qquad (4)$$

Из неравенства (2) и (4) следует:

$$2-a \le x \le \frac{2a-2}{a-2}. \qquad (5)$$

Объединив множества решений (1) и (5), получим: $x < \frac{2a-2}{a-2}$, т. к. при $a>2$ $1-a < \frac{2a-2}{a-2}$.

Если $a<2$, то решение системы (*):

$$x \ge 2-a. \qquad (6)$$

Объединив множество решений (1) и (6), получим: $x \in \mathbb{R}$.

Ответ. При $a>2$ $x \in \left(-\infty; \frac{2a-2}{a-2}\right)$; при $a \le 2$ $x \in \mathbb{R}$.

Пример 17. Решите неравенство $a\sqrt{x+2}<2$.

Решение

ОДЗ: $x+2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -2$.

1) Пусть $a=0$, тогда $0 \cdot \sqrt{x+2} < 2$. Здесь при любом $x \ge -2$ имеем верное неравенства: $0<2$.
2) Пусть $a<0$. Тогда левая часть неравенства отрицательна — неравенство справедливо при $x \ge -2$.
3) Пусть $a>0$. Тогда данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} a^2(x+2)<4, \\ x \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x < 4-2a^2, \\ x \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < \frac{4}{a^2}-2, \\ x \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-2; \frac{4}{a^2}-2\right).$$

Ответ. При $a \in (-\infty; 0]$ $x \in [-2; +\infty)$; при $a \in (0; +\infty)$ $x \in \left[-2; \frac{4}{a^2}-2\right)$.

Пример 18. Решите неравенство

$$\sqrt{x+4a} < a-\sqrt{x}.$$

Решение

Левая часть неравенства неотрицательна. Тогда при $a \le 0$ правая часть отрицательна. Следовательно, при $a \le 0$ нет решений.

Пусть $a>0$, тогда неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} a>0, \\ x+4a\ge 0, \\ x\ge 0, \\ a-\sqrt{x}>0, \\ x+4a<\left(a-\sqrt{x}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ x\ge -4a, \\ x\ge 0, \\ \sqrt{x}<a, \\ 2a\sqrt{x}<a^2-4a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a>0, \\ x\ge 0, \\ x<a^2, \\ 2\sqrt{x}<a-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ 0\le x<a^2, \\ a-4>0, \\ 4x<(a-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Если $a-4<0$ ($a<4$), то система решений не имеет

$$\begin{cases} a>4, \\ 0\le x<a^2, \\ x<\dfrac{(a-4)^2}{4}. \end{cases} \qquad (*)$$

Докажем, что при $a>4$, $a^2>\dfrac{(a-4)^2}{4}$. Составим разность и преобразуем это неравенство:

$$a^2-\frac{(a-4)^2}{4}=\frac{4a^2-a^2+8a-16}{4}=$$

$$=\frac{3a^2+8a-16}{4}=\frac{3(a+4)\left(a-\frac{4}{3}\right)}{4}>0$$

При

$$a>4.$$

Этим неравенство доказано. Напишем решения системы (*):

$$0\le x<\frac{(a-4)^2}{4}$$

При

$$a>4.$$

Учитывая, что из $a\le 4\Rightarrow a-4\le 0$, запишем ответ.

Ответ. При $a>4$ $x\in\left[0;\dfrac{(a-4)^2}{4}\right)$; при $a\le 4$ решений нет.

Пример 19. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-4ax}<6a-x.$$

Решение

Неравенство равносильно системе неравенств:

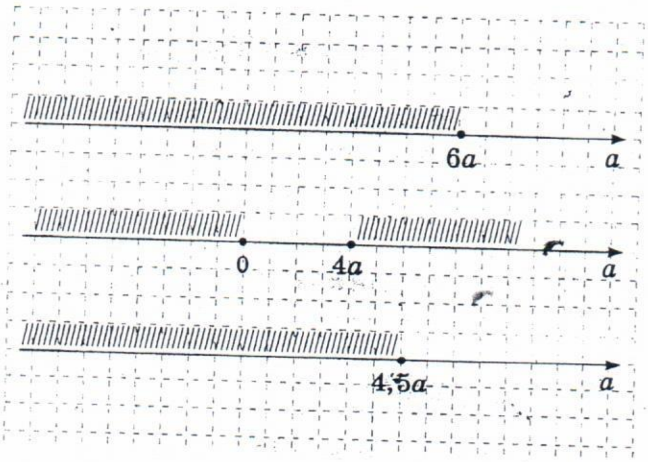
$$\begin{cases} 6a-x>0, \\ x^2-4ax\ge 0, \\ x^2-4ax<(6a-x)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<6a, \\ x(x-4a)\ge 0, \\ x^2-4ax<36a^2-12ax+x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<6a, \\ x(x-4a)\ge 0, \\ 2ax<9a^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Решим эту систему при $a>0$. Имеем:

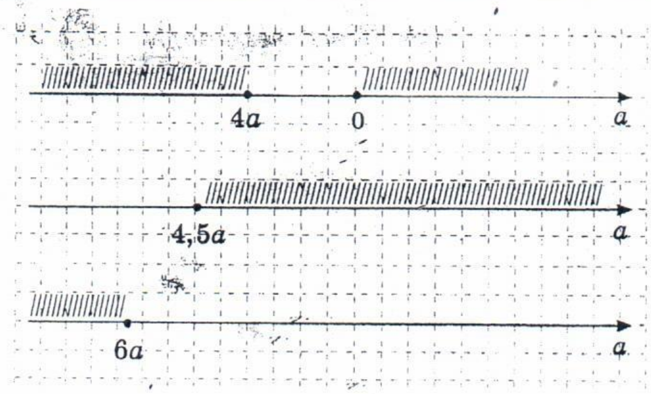
$$\begin{cases} x<6a, \\ \left[\begin{array}{l} x\le 0, \\ x\ge 4a, \end{array}\right. \\ x<4{,}5a. \end{cases}$$



Изобразив решения каждого неравенства на числовой прямой, получим, что при $a>0$ $x\in(-\infty;0]\cup[4a;4{,}5a)$.

Решим систему (1) при $a<0$.

$$\begin{cases} x<6a, \\ \left[\begin{array}{l} x\le 4a, \\ x\ge 0, \end{array}\right. \\ x>4{,}5a. \end{cases}$$



При $a<0$ система решений не имеет.

Рассмотрим начальное неравенство при $a=0$.

Получим неравенство $\sqrt{x^2}<-x$ или $|x|<-x$, которое решений не имеет.

Ответ. При $a\le 0$ решений нет; при $a>0$ $x\in(-\infty;0]\cup[4a;4,5a)$.

Пример 20. Решите неравенство

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{\frac{a^2}{x+a}}<\sqrt{x+4a}\,.$$

Решение

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x+a>0, \\ x+4a\ge 0, \\ x+a-|a|<\sqrt{(x+a)(x+4a)}. \end{cases} \qquad (*)$$

Для решения системы (*) рассмотрим три случая в зависимости от значений параметра a: $a<0$, $a=0$ и $a>0$.

1) Если $a<0$, то система (*) примет вид:

$$\begin{cases} a<0, \\ x>-a, \\ x\ge -4a, \\ x+2a<\sqrt{(x-4a)(x+a)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ x\ge -4a, \\ ax>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a<0, \\ x\ge -4a, \\ x<0. \end{cases}$$

Решений нет.

2) Если $a=0$, то имеем систему (*см.* (*)):

$$\begin{cases} a=0, \\ x>0, \\ x<\sqrt{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0, \\ x>0, \\ x<|x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0, \\ x>0, \\ x<x. \end{cases}$$

Решений нет.

3) Если $a>0$, то имеем систему (*см.* (*)):

$$\begin{cases} a>0, \\ x>-a, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ x>0. \end{cases}$$

Ответ. При $a>0$ $x\in(0;+\infty)$; при $a\le 0$ решений нет.

Рассмотрим следующий пример, где на параметр наложено ограничение.

Пример 21. Решите неравенство

$$a(2x+1)+x\sqrt{x^2+2}<-(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}\,,$$

где

$$0\le a\le 1\,.$$

Решение

Так как

$$x^2+2>0 \text{ и } x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0\,,$$

при всех $x\in\mathbb{R}$, то квадратные корни существуют при всех $x\in\mathbb{R}$ (т.е. ОДЗ неравенства: $x\in\mathbb{R}$).

Введём подстановки:

$$\sqrt{x^2+2}=t\,,\ \sqrt{x^2+2x+3}=u\,,$$

где

$$t,u>0\,.$$

Тогда

$$u^2-t^2=x^2+2x+3-(x^2+2)=2x+1\,,$$

$$x=\frac{u^2-t^2-1}{2}\,,$$

$$x+1=\frac{u^2-t^2+1}{2}\,.$$

В новых обозначениях данное неравенство примет вид:

$$a(u^2-t^2)+\frac{u^2-t^2-1}{2}t+\frac{u^2-t^2+1}{2}u<0\,.$$

После преобразований:

$$a(u^2-t^2)+\frac{u^2-t^2}{2}(u+t)+\frac{u-t}{2}<0\,,$$

$$2a(u-t)(u+t)+(u-t)(u+t)^2+(u-t)<0\,,$$

$$(u-t)\left((u+t)^2+2a(u+t)+1\right)<0\,,$$

$$(u-t)\left(((u+t)+a)^2+1-a^2\right)<0\,.$$

В полученном неравенстве при $0 \le a \le 1$ вторая скобка принимает положительные значения, т. к. неравенство равносильно неравенству:

$$u - t < 0 \Leftrightarrow u < t \Rightarrow \sqrt{x^2+2x+3} < \sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow$$

$$x^2+2x+3 < x^2+2 \Leftrightarrow 2a < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}.$$

Ответ. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Пример 22. Решите неравенство

$$\sqrt{5ax+6a^2} < x+3a.$$

Решение

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 5ax+6a^2 \ge 0, \\ x+3a > 0, \\ 5ax+6a^2 < (x+3a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a(5x+6a) \ge 0, \\ x > -3a, \\ 5ax+6a^2 < x^2+6ax+9a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a(5x+6a) \ge 0, \\ x > -3a, \\ x^2+ax+3a^2 > 0. \end{cases}$$

1) При $a=0$ $\begin{cases} a \ge 0, \text{(истинно)}, \\ x > 0, \\ x^2 > 0; \end{cases}$ $x \in (0; +\infty)$.

2) При $a<0$

$$\begin{cases} x \le -\frac{6}{5}a, \\ x > -3a, \\ x \in \mathbb{R}, \text{т.е. } D = -11a^2 < 0. \end{cases}$$

Решений нет.

3) При $a>0$ $\begin{cases} x \ge -\frac{6}{5}a, \\ x > -3a, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $x \in \left[-\frac{6}{5}a; +\infty\right)$.

Ответ. При $a=0$ $x \in (0; +\infty)$; при $a<0$ решений нет; при $a>0$ $x \in \left(-\frac{6}{5}a; +\infty\right)$.

Пример 23. При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{x-4a} + \sqrt{a-x} \ge 2$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Решение

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x \ge 4a, \\ x \le a, \\ x-4a+2\sqrt{(x-4a)(a-x)}+a-x \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4a \le x \le a, \\ 2\sqrt{(x-4a)(a-x)} \ge 4+3a. \end{cases} \quad (*)$$

Если

$$4+3a \ge 0 \Leftrightarrow a \ge -\frac{4}{3},$$

то система (*) равносильна системе:

$$\begin{cases} a \ge -\frac{4}{3}, \\ 4a \le x \le a, \\ 4(-x^2+5ax-4a^2) \ge 16+24a+9a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a \ge -\frac{4}{3}, \\ 4a \le x \le a, \\ 4x^2-20ax+25a^2+24a+16 \le 0. \end{cases}$$

Если $a < -\frac{4}{3}$, то система (*) равносильна системе:

$$\begin{cases} a < -\frac{4}{3}, \\ 4a \le x \le a. \end{cases}$$

Неравенство

$$4x^2-20ax+25a^2+24a+16 \le 0$$

имеет единственное решение при $D=0$.

$$D = 100a^2 - 100a^2 - 96a - 64 = 0$$

при

$$a = -\frac{2}{3},$$

при этом это единственное решение

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} a \ge -\dfrac{4}{3}, \\ a = -\dfrac{2}{3}, \\ -\dfrac{4}{3} \le x \le -\dfrac{2}{3}, \\ x_0 = \dfrac{20a}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{3}, \\ -\dfrac{4}{3} \le x \le -\dfrac{2}{3}, \\ x_0 = \dfrac{5a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{3}, \\ x_0 = -\dfrac{5}{3}, \\ -\dfrac{4}{3} \le -\dfrac{5}{3} \le -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, при $a = -\frac{2}{3}$ существует единственное решение $x = -\frac{5}{3}$.

Ответ. При $a = -\frac{2}{3}$ неравенство имеет единственное решение $x = -\frac{5}{3}$.

Пример 24. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\sqrt{2a^2 - x^2} \ge |x - a|$$

имеет единственное решение.

Решение.

Неравенство равносильно неравенству:

$$2a^2 - x^2 \ge (x-a)^2,$$

т. е. $x^2 - 2ax + a^2 \le 2a^2 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2ax - a^2 \le 0$.

Единственное решение получим, когда

$$D = 0;$$

$$D = a^2 + 2a^2 = 3a^2 = 0,$$

при

$$a = 0.$$

Ответ. При $a = 0$ неравенство имеет единственное решение $(x = 0)$.

Чтобы перейти к следующему примеру, докажем лемму.

Лемма. Неравенство $a\sqrt{b} \le 0$ равносильно системе:

$$\begin{cases} b \ge 0, \\ ab^2 \le 0. \end{cases}$$

Доказательство

$$b \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{b} \ge \sqrt{0} \Leftrightarrow \sqrt{b} \ge 0 \qquad (1)$$

$$b \ge 0 \Leftrightarrow b^3 \ge 0^3 \Leftrightarrow b^3 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{b^3} \ge \sqrt{0} \Leftrightarrow \sqrt{b^3} \ge 0. \qquad (2)$$

Почленным умножением неравенств (1) и (2) имеем:

$$\sqrt{b} \cdot \sqrt{b^3} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{b^4} \ge 0 \Leftrightarrow b^2 \ge 0. \qquad (3)$$

Тогда

$$\begin{cases} b \ge 0, \\ a\sqrt{b} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge 0, \\ a\sqrt{b} \cdot \sqrt{b^3} \le 0 \cdot \sqrt{b^3} \end{cases} \underset{\text{см.(3)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b \ge 0, \\ ab^2 \le 0 \end{cases},$$

что и требовалось доказать.

Пример 25. Решите неравенство

$$(x - 2a - 1)\sqrt{x + 2a - 4} \le 0.$$

Решение

По лемме данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 2a - 4 \ge 0, \\ (x - 2a - 1) \cdot (x + 2a - 4)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \ge 4 - 2a, \\ (x - (2a+1))(x - (4-2a))^2 \le 0. \end{cases} \qquad (*)$$

1) Если

$$2a + 1 \ge 4 - 2a \Leftrightarrow a \ge \frac{3}{4},$$

где

$$(2a+1) \text{ и } (4-2a) \text{ —}$$

решения неравенств (*), т. е. при $a \ge \frac{3}{4}$ решение системы можно иллюстрировать (*рис. 2*).

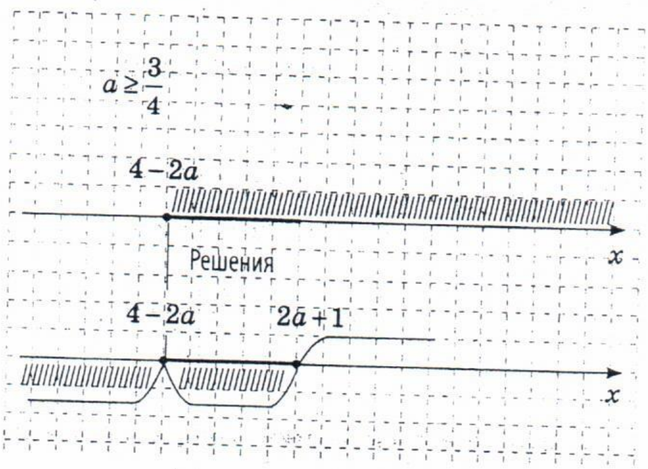


Рис. 2

Значит, при

$$a \geq \frac{3}{4} \quad x \in [4-2a; 2a+1].$$

2) Если $2a+1 < 4-2a \Rightarrow a \leq \frac{3}{4}$, то $x \in (-\infty; 2a+1]$ (*рис. 3*):

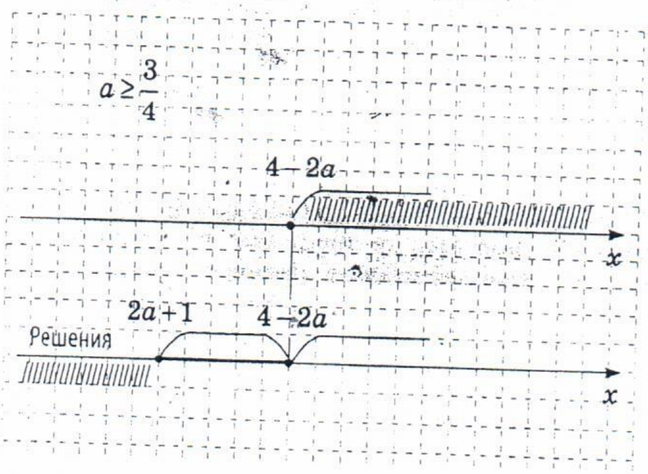


Рис. 3

Ответ. При $a \geq \frac{3}{4}$ $x \in [4-2a; 2a+1]$; при $a \leq \frac{3}{4}$ $x \in (-\infty; 2a+1]$.

Пример 26. При каких значениях параметра a неравенство $(x-2a-1)\sqrt{x+2a-4} \leq 0$:

1) будет иметь множество решений, составляющих отрезок длины $|a|$;
2) решением будем иметь луч;
3) будет иметь единственное решение?

Решение

Воспользуемся решением примера 25.

1) при $a \geq \frac{3}{4}$ $x \in [4-2a; 2a+1]$ — отрезок.

Так как

$$|2a+1|-(4-2a) = |a|,$$

то $|4a-3| = |a| \Leftrightarrow (4a-3)^2 = a^2 \Leftrightarrow$

$$(4a-3)^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (4a-3-a)(4a-3+a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a-1)(5a-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1=0, \\ 5a-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1>\frac{3}{4}; \\ a=\frac{3}{5}<\frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

$a = \frac{3}{5} < \frac{3}{4}$ — не удовлетворяет условию.

Ответ. При $a=1$ решением неравенства является отрезок длины $|a|=1$, т.е. $x \in [2;3]$.

2) *Ответ.* При $a \leq \frac{3}{4}$ решением служит луч

$x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$ (*см. ответ к примеру 25*).

3) *Ответ.* При $a \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ имеем единственное решение $x = 4-2a$ (*см. рис. 2*).

Пример 27. Найти все значения параметра a, при которых любое значение $x \in (1;3)$ не является решением неравенства

$$(x-2a-1)\sqrt{x+2a-4} \leq 0.$$

Решение

Воспользуемся ответом к примеру 25. Так как любое значение $x \in (1;3)$ не является решением, то

1) для $a \geq \frac{3}{4}$ $\begin{cases} 4-2a \leq 1, \\ 2a+1 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1{,}5, \\ a \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 1{,}5$;

2) для $a \leq \frac{3}{4}$ $2a+1 \geq 3 \Leftrightarrow a \geq 1$; $a \in \varnothing$.

Ответ. При $a \in [1{,}5; +\infty)$ любое значение $x \in (1;3)$ не является решением неравенства.

Литература

1. *Математика.* Подготовка к ЕГЭ — 2011: учебно-методическое пособие / под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова.— Ростов-на-Дону : Легион, 2010.— 416 с. — («Готовимся к ЕГЭ»)
2. *Сефибеков С. Р.* Психолого-педагогические условия развития математического образования школьников в инновационной школьной среде: монография.— Н. Новгород : НИУ РАНХ и ГС, 2014.— 172 с.
3. *Сефибеков С. Р.* Организация элективного курса по математике в средней школе: математические рекомендации для педагогов / С. Р. Сефибеков.— Н. Новгород : НИУ РАНХ и ГС, 2014.— 35 с.
4. *Сефибеков С. Р.* Эффективный курс по математике в средней школе: методические рекомендации для студентов: — Н. Новгород : НИУ РАНХ и ГС, 2014.— 28 с.
5. *Сефибеков С. Р.* Внеклассная работа по математике: Книга для учителя. — М. : Просвещение, 1988. — 80 с.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Трудность решения задачи с параметром заключается в том, что оно требует от решающего повторения ряда математических предложений и умелого их применения, без которых немыслимо это решение.
С. Р. Сефибеков

Показательные и логарифмические уравнения и неравенства, т. е. такие, где неизвестные входят в показатель степени или находятся под знаком с параметром логарифмической функции, принадлежат к классу трансцендентных (не алгебраических) уравнений и неравенств. При решении таких уравнений сохраняются все теоретические положения, верные для уравнений, не содержащих параметр. Напомним некоторые из этих положений.

1. Показательное уравнение

$$a^{f(x)}=b^{q(x)} \ (a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1) \qquad (1)$$

равносильно уравнению:

$$f(x)\log_c a=q(x)\log_c b\ , \qquad (2)$$

которое получается логарифмированием уравнения (1) по какому-либо основанию $c>0$, $c\neq 1$.

2. Корнями уравнения

$$(\varphi(x))^{f(x)}=(\varphi(x))^{q(x)} \qquad (3)$$

считаются только решения смешанной системы:

$$\begin{cases}\varphi(x)>0,\\ \varphi(x)\neq 1,\\ f(x)=q(x)\end{cases} \qquad (4)$$

и те значения x, для которых $\varphi(x)=1$, если при этих значениях определены $f(x)$ и $q(x)$.

Функция вида $(\varphi(x))^{f(x)}$ определена только при $\varphi(x)>0$, поэтому те значения x, которые формально удовлетворяют равенству (3), но при которых $\varphi(x)\leq 0$, не принято считать корнями уравнения (3).

3. Логарифмическое уравнение

$$\log_a f(x)=b \qquad (5)$$

равносильно уравнению

$$f(x)=a^b\ \ (f(x)>0,\ a>0,\ a\neq 1). \qquad (6)$$

4. Логарифмическое уравнение

$$\log_a f(x)=\log_a q(x)\ \ (a>0,\ a\neq 1) \qquad (7)$$

равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}f(x)>0,\\ f(x)=q(x)\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}q(x)>0,\\ f(x)=q(x).\end{cases} \qquad (8)$$

Для решения уравнения (7) переходят только к одной из этих систем (той, которая проще), либо решают уравнение $f(x)=q(x)$, которое может иметь корни, посторонние для исходного уравнения, и проверяют каждый из них подстановкой в исходное уравнение (т. е. если не переходить к одной из систем (8), то проверка является обязательной частью решения уравнения).

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенства вида

$$a^x > c\,,\ a^x < c\,,$$

$$f(x)^{\varphi_1(x)} > f(x)^{\varphi_2(x)}\,,$$

$$f(x)^{\varphi_1(x)} < f(x)^{\varphi_2(x)}\,,$$

где $a>0$, $a\neq 1$, $c>0$, называются простейшими. При их решении используются следующие равносильные преобразования:

1) $a^x > c \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>1, \\ x>\log_a c; \end{cases}\\ \begin{cases} 0<a<1, \\ x<\log_a c; \end{cases}\end{array}\right.$

2) $a^x < c \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>1, \\ x<\log_a c; \end{cases}\\ \begin{cases} 0<a<1, \\ x>\log_a c; \end{cases}\end{array}\right.$

3) $f(x)^{\varphi_1(x)} > f(x)^{\varphi_2(x)} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)>1, \\ \varphi_1(x)>\varphi_2(x); \end{cases}\\ \begin{cases} 0<f(x)<1, \\ \varphi_1(x)<\varphi_2(x); \end{cases}\end{array}\right.$

4) $\begin{cases} a^{\varphi_1(x)} < a^{\varphi_2(x)}, \\ a>1 \end{cases} \Leftrightarrow\; \left(\varphi_1(x)<\varphi_2(x)\right);$

5) $\begin{cases} a^{\varphi_1(x)} > a^{\varphi_2(x)}, \\ a>1 \end{cases} \Leftrightarrow\; \left(\varphi_1(x)>\varphi_2(x)\right);$

6) $\begin{cases} a^{f(x)} < a^{q(x)}, \\ 0<a<1 \end{cases} \Leftrightarrow\; \left(f(x)>q(x)\right);$

7) $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{q(x)}, \\ 0<a<1 \end{cases} \Leftrightarrow\; \left(f(x)<q(x)\right).$

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенства вида $\log_a x > c$ и вида $\log_a x < c$ ($a>0$, $a\neq 1$, $x>0$) называются простейшими логарифмическими неравенствами.

Основные случаи решения логарифмических неравенств

I. $\log_a x > c \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>1, \\ x>a^c; \end{cases}\\ \begin{cases} 0<a<1, \\ 0<x<a^c. \end{cases}\end{array}\right.$

II. $\log_a x < c \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>1, \\ 0<x<a^c; \end{cases}\\ \begin{cases} 0<a<1, \\ x>a^c. \end{cases}\end{array}\right.$

III. $\log_{f(x)} q_1(x) > \log_{f(x)} q_2(x) \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)>1, \\ q_1(x)>q_2(x), \\ q_2(x)>0; \end{cases}\\ \begin{cases} 0<f(x)<1, \\ q_1(x)<q_2(x), \\ q_1(x)>0. \end{cases}\end{array}\right.;$

IV. $\log_{f(x)} q_1(x) < \log_{f(x)} q_2(x) \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)>1, \\ q_1(x)<q_2(x), \\ q_1(x)>0; \end{cases}\\ \begin{cases} 0<f(x)<1, \\ q_1(x)>q_2(x), \\ q_2(x)>0. \end{cases}\end{array}\right..$

Пример 1. Решите уравнение

$$9^x + \left(3a^2+a+4\right)\cdot 3^x - a - 8 = 0\,. \qquad (*)$$

Решение

Пусть $3^x = t$, $t>0$, тогда уравнение (*) примет вид

$$t^2 + \left(3a^2+a+4\right)\cdot t - a - 8 = 0\,. \qquad (**)$$

Имеем квадратное уравнение относительно t. Квадратное уравнение имеет корни, когда дискриминант

$$D = \left(3a^2+a+4\right)^2 + 4(a+8) \geq 0\,. \qquad (1)$$

Установить, когда $D\geq 0$ технически трудно, поэтому будем рассуждать иначе.

Дискриминант D (*см. (1)*) не равен нулю: $D\neq 0$. Если полагать $D=0$, то уравнение (**)

имело бы двукратный корень $t=m$ и его левая часть представляла бы полный квадрат: $(t-m)^2$. Но левая часть уравнения (**) не является точным квадратом!

Следовательно, чтобы уравнение (**) имело два различных корня, должно выполняться неравенство $D>0$.

Нас интересуют положительные корни уравнения (**). Поэтому рассмотрим два случая: оба корня положительны или один из корней положительный.

Будем рассуждать, пользуясь теоремой Виета.

Случай 1. Корни уравнения (**) $t_1>0$ и $t_2>0$. По теореме Виета имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} t_1+t_2>0, \\ t_1\cdot t_2>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -3a^2-a-4>0, \\ -a-8>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3a^2+a+4<0, \\ a<-8, \end{cases}$$

откуда получаем, что система не имеет решений. Значит, уравнение (**) не может иметь два положительных корня.

Случай 2. Уравнение (**) имеет один отрицательный и один положительный корень или один корень равен нулю, а второй — положительный.

Пусть $t_1<0$ и $t_2>0$, тогда по теореме Виета имеем $t_1\cdot t_2<0$ или $-a-8<0$, откуда $a>-8$.

При этих значениях a $D>0$, тогда

$$t_1=\frac{-(3a^2+a+4)-\sqrt{D}}{2}<0$$

и

$$t_2=\frac{-(3a^2+a+4)+\sqrt{D}}{2}>0$$

(т. к. $\sqrt{D}>\left|-(3a^2+a+4)\right|$).

Отсюда

$$3^x=t_2,\ x=\log_3 t_2,\ x=\log_3\frac{-(3a^2+a+4)+\sqrt{D}}{2}.$$

Если $t_1=0$, $t_2>0$, то уравнение (**) примет вид $-a-8=0$, откуда $a=-8$.

При $a=-8$ уравнение (**) примет вид $t^2+188t=0$, которое не имеет положительного корня. Значит, для корней уравнения (**) условие $t_1=0$ и $t_2>0$ не выполняется.

Ответ. При $a>-8$

$$x=\log_3\frac{-(3a^2+a+4)+\sqrt{D}}{2},$$

где

$$D=(3a^2+a+4)^2+4(a+8);$$

при $a\le-8$ корней нет.

Пример 2. При каких значениях a уравнение

$$25^x-2(a+3)\cdot5^x+2a+5=0 \qquad (*)$$

имеет один корень?

Решение

Пусть

$$5^x=t,\ t>0.$$

Тогда данное уравнение примет вид:

$$t^2-2(a+3)\cdot t+2a+5=0. \qquad (1)$$

$$\frac{D}{4}=(a+3)^2-2a-5=$$

$$=a^2+6a+9-2a-5=a^2+4a+4=(a+2)^2.$$

Тогда

$$t_1=a+3-a-2=1,$$

$$t_2=a+3+a+2=2a+5.$$

Учитывая, что $5^x=t$, получим уравнение $5^x=1$, откуда $x=0$. То есть уравнение (*) при любом значении a будет иметь один корень $x=0$.

Для того чтобы уравнение (*) имело только один корень, нужно, чтобы уравнение $5^x=2a+5$ не имело корня, или его корень должен равняться нулю.

Тогда имеем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} 2a+5\le0, \\ 2a+5=1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} a\le-2,5, \\ a=-2. \end{array}\right.$$

Ответ. При $a\in(-\infty;-2,5]\cup\{-2\}$.

Пример 3. Решите уравнение

$$36^x - a\cdot 6^x - a + 3 = 0. \qquad (*)$$

Решение

Пусть $6^x = t$, $t > 0$. Тогда уравнение (*) примет вид:

$$t^2 - a\cdot t - a + 3 = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) будет иметь корни, когда дискриминант $D \geq 0$:

$$D = a^2 + 4a - 12 = (a+6)(a-2) \geq 0 \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} a \leq -6; \\ a \geq 2. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Корни уравнения (1):

$$t_1 = \frac{a - \sqrt{D}}{2} \text{ и } t_2 = \frac{a + \sqrt{D}}{2}.$$

Выясним знаки корней t_1 и t_2, воспользовавшись формулами Виета (*см. (2)*):

$$1)\ \begin{cases} a \leq -6, \\ t_1 = \dfrac{a - \sqrt{D}}{2}, \\ t_1 + t_2 = a, \\ t_1 \cdot t_2 = -a + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 < 0, \\ t_1 + t_2 < 0, \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 < 0, \\ t_2 < 0. \end{cases}$$

Значит, при $a \leq -6$ уравнение (*) решений не имеет.

$$2)\ \begin{cases} a \geq 2, \\ t_2 = \dfrac{a + \sqrt{D}}{2}, \\ t_1 + t_2 = a, \\ t_1 \cdot t_2 = -a + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 2, \\ t_2 > 0, \\ t_1 + t_2 > 0, \\ t_1 \cdot t_2 = -a + 3. \end{cases} \qquad (3)$$

Из системы (3) имеем:

Если $a \in [3; +\infty)$, то $t_1 \leq 0$. Тогда корень уравнения (*) найдём из уравнения

$$6^x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2},$$

откуда

$$x = \log_6 \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2}.$$

Если $a \in [2; 3)$, то $t_1 \cdot t_2 > 0 \Rightarrow t_1 > 0$.

Тогда оба корня уравнения (1) положительны.

Отсюда имеем:

$$6^x = t_1 \Rightarrow 6^{x_1} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2} \iff$$

$$x_1 = \log_6 \frac{a - \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2};$$

$$6^x = t_2 \Rightarrow 6^{x_2} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2} \iff$$

$$x_2 = \log_6 \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2}.$$

Ответ. При $a \in [3; +\infty)$

$$x = \log_6 \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2};$$

при

$$a \in [2; 3)$$

$$x = \log_6 \frac{a - \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2},$$

$$x = \log_6 \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2};$$

при

$$a \in (-\infty; 2)$$

корней нет.

Пример 4. Решите уравнение

$$a \cdot 2^{x+3} - 3^{x^2-2} = 3^{x^2+1} - a \cdot 2^{x-1}, \text{ где}$$

$$|a| \geq 1.$$

Решение

Преобразуем уравнение к равносильному виду:

$$a\left(2^{x+3} + 2^{x-1}\right) = 3^{x^2+1} + 3^{x^2-2},$$

$$a \cdot 2^x \left(8 + \frac{1}{2}\right) = 3x^2 \left(3 + \frac{1}{9}\right),$$

$$a\cdot 153\cdot 2^x=56\cdot 3^{x^2}. \qquad (*)$$

По условию

$$|a|\geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\leq -1, \\ a\geq 1. \end{array}\right.$$

Если $a\leq -1$, то левая часть равенства (*) отрицательна, а правая — положительна. Такое равенство невозможно. Значит, уравнение корней не имеет.

Если $a\geq 1$, то логарифмируя обе части уравнения по основанию 3 равенство (*), получим квадратное уравнение:

$$\log_3 a + x\log_3 2=\log_3\frac{56}{153}+x^2,$$

$$x^2-x\log_3 2+\log_3\frac{56}{153}-\log_3 a=0,$$

$$x^2-x\log_3 2+\log_3\frac{56}{153a}=0.$$

$$D=\log_3^2 2-4\log_3\frac{56}{153a}.$$

Покажем, что $D>0$ при любом значении $a\geq 1$.

Если $a\geq 1$, то $153a\geq 153$ и $0<\frac{1}{153a}\leq\frac{1}{153}$, тогда

$$0<\frac{56}{153a}\leq\frac{56}{153}<1.$$

Но при $0<x<1$ возрастающая функция $y=\log_3 x$ принимает отрицательные значения. Отсюда

$$\log_3\frac{56}{153a}<0$$

при

$$a\geq 1,$$

тогда

$$-4\log_3\frac{56}{153a}>0.$$

Так как $\log_3^2 2>0$, то $D>0$.

Следовательно, корни квадратного уравнения: $x=\frac{\log_3 2\pm\sqrt{D}}{2}$.

Ответ. При

$$a\geq 1 \; x=\frac{\log_3 2\pm\sqrt{D}}{2},$$

где

$$D=\log_3^2 2-4\log_3\frac{56}{153a};$$

при

$$a\leq -1$$

корней нет.

Пример 5. Решите уравнение

$$\sqrt{a(2^x-2)+1}=1-2^x.$$

Решение

Пусть $2^x=t$, $t>0$, тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{a(t-2)+1}=1-t \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t>0, \\ 1-t\geq 0, \\ a(t-2)+1=(1-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0<t\leq 1, \\ at-2a+1=1-2t+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0<t\leq 1, & (1) \\ t^2-(a+2)t+2a=0. & (2) \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение (2).

$$D=(a+2)^2-8a=a^2+4a+4-8a=(a-2)^2\geq 0,$$

$$t_1=\frac{a+2-(a-2)}{2}=2$$

и

$$t_2=\frac{a+2+(a-2)}{2}=a.$$

$$t=2$$

не удовлетворяет условию (1).

Корень $t_2=a$ удовлетворяет условию $0<t\leq 1$ при $0<a\leq 1$.

Тогда при $a\in(0;1]$ имеем $2^x=a$, откуда $x=\log_2 a$.

Ответ. При $a\in(0;1]$ $x=\log_2 a$; при $a\in(-\infty;0]\cup(1;+\infty)$ корней нет.

Пример 6. Для каждого значения a решите уравнение $4^x-2a(a+1)\cdot 2^{x-1}+a^3=0$. ([1], 14.18)

Решение

Пусть $2^x=t$, $t>0$. Тогда уравнение примет вид:

$$t^2-2a(a+1)\cdot\frac{t}{2}+a^3=0,$$

$$t^2-a(a+1)t+a^3=0 \text{ —}$$

это квадратное уравнение относительно t.

$$D=(a(a+1))^2-4a^3=(a^2+a)^2-4a^3=$$

$$=a^4+2a^3+a^2-4a^3=a^4-2a^3+a^2=(a^2-a)^2\geq 0.$$

Корни уравнения:

$$t_1=\frac{a^2+a-(a^2-a)}{2}=a$$

и

$$t_2=\frac{a^2+a+(a^2-a)}{2}=a^2.$$

Если $a=0$, то $t_1=t_2=0$. Но $t=0$ не удовлетворяет условию $t>0$.

Если $a<0$, то $t_1=a<0$.

Значит, t_1 не удовлетворяет условию $t>0$.

Тогда при $a<0$ имеем: $2^x=a^2$, $x=\log_2 a^2$.

Если $a>0$, то имеем: $2^x=a$, откуда $x=\log_2 a$, или $2^x=a^2$, откуда $x=\log_2 a^2$.

Ответ. При $a<0$ $x=\log_2 a^2$; при $a>0$ $x=\log_2 a^2$, $x=\log_2 a$; при $a=0$ корней нет.

Пример 7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-6,5}(x^2+1)=\log_{a-6,5}((a-5x)x)$$

имеет ровно два различных корня. ([1], 14.20)

Решение

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a-6,5>0, \\ a-6,5\neq 1, \\ (a-5x)x>0, \\ (a-5x)x=x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>6,5, \\ a\neq 7,5, \\ (a-5x)x=x^2+1. \end{cases} \quad (*)$$

Рассмотрим уравнение из системы (*) при условиях $a>6,5$ и $a\neq 7,5$.

$$(a-5x)x=x^2+1,$$

$$6x^2-ax+1=0.$$

$D=a^2-24$. Уравнение $6x^2-ax+1=0$ имеет ровно два различных корня, когда дискриминант $D>0$, то есть при

$$a\in(-\infty;-2\sqrt{6})\cup(2\sqrt{6};+\infty).$$

Учитывая условия системы (*), имеем, что исходное уравнение имеет два различных корня при $(6,5;7,5)\cup(7,5;+\infty)$.

Ответ. При $a\in(6,5;7,5)\cup(7,5;+\infty)$.

Пример 8. Для каждого a решите уравнение $\log_{\sqrt{2-x}}\sqrt{2x+a}=2$. ([1], 14.21)

Решение

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2-x>0, \\ 2-x\neq 1, \\ \sqrt{2x+a}=2-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x<2, \\ x\neq 1, \\ 2x+a=4-4x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x<2, \ (1) \\ x\neq 1, \ (2) \\ x^2-6x-a+4=0. \ (3) \end{cases} \quad (*)$$

Решим квадратное уравнение (3) из системы (*).

$$D_1=9+a-4=a+5\geq 0$$

при

$$a\geq -5.$$

Корни:

$$x_1=3-\sqrt{a+5}$$

и

$$x_2=3+\sqrt{a+5}.$$

Определим значения a, при которых выполняются условия (1) и (2) для корней x_1 и x_2.

1) $\begin{cases} 3-\sqrt{a+5}<2, \\ 3-\sqrt{a+5}\ne 1, \\ a\ge -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a+5}>1, \\ \sqrt{a+5}\ne 2, \\ a\ge -5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a>-4, \\ a\ne -1, \\ a\ge -5 \end{cases} \Rightarrow a\in(-4;-1)\cup(-1;+\infty);$$

2) $\begin{cases} 3+\sqrt{a+5}<2, \\ 3+\sqrt{a+5}\ne 1, \\ a\ge -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a+5}<-1, \\ \sqrt{a+5}\ne -2 \\ a\ge -5, \end{cases}$

откуда имеем, что система не имеет решений.

Ответ. При

$$a\in(-4;-1)\cup(-1;+\infty)\quad x=3-\sqrt{a+5};$$

при

$$a\in(-\infty;-4]\cup\{-1\}$$

корней нет.

Пример 9. Для каждого значения a решите уравнение

$$\log_a\left(x^2-3a\right)=\log_a\left(a^2-3x\right).([1],\ 14.36)$$

Внимание! В книге [1], (с. 161) вместо a^2 написано ax^2. А это не даёт ответ, приведённый на с. 211!

Решение

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a>0, \\ a\ne 1, \\ x^2-3a=a^2-3x, \\ a^2-3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a>0, & (1) \\ a\ne 1, & (2) \\ x^2+3x-a^2-3a=0, & (3) \\ x<\dfrac{a^2}{3}. & (4) \end{cases} \qquad (*)$$

Решим квадратное уравнение (3) из системы (*).

$$D=9+4a^2+12a=4a^2+12a+9=(2a+3)^2>0$$

при всех $a\in\mathbb{R}$.

Но, учитывая условия (1) и (2), имеем

$$a\in(0;1)\cup(1;+\infty) \qquad (5)$$

Корни уравнения (3):

$$x_1=\frac{-3-(2a+3)}{2}=-a-3$$

и

$$x_2=\frac{-3+(2a+3)}{2}=a.$$

Определим значения параметра a, при котором выполняется условие (4) для корня x_1:

$$x_1<\frac{a^2}{3},$$

$$-a-3<\frac{a^2}{3},$$

$$a^2+3a+9>0,$$

$$\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}>0$$

при всех $a\in\mathbb{R}$. Но, учитываем в ответе для параметра a промежутки (5)!

Определим значения параметра a, при котором выполняется условие (4) для корня x_2:

$$x_2<\frac{a^2}{3},$$

$$a<\frac{a^2}{3},$$

$$a^2-3a>0,$$

$$a(a-3)>0.$$

Учитывая условие (5), имеем, что при $a>3$ корень x_2 удовлетворяет условию (5). Объединяя полученные результаты, запишем ответ.

Ответ. При $a\in(0;1)\cup(1;3]$ $x=-a-3$; при $a\in(3;+\infty)$ $x_1=a$, $x_2=-a-3$; при $a\in(-\infty;0]\cup\{1\}$ корней нет.

Пример 10. Решите уравнение

$$\lg^2\left(a^2x^2\right)=4\lg ax.$$

Решение

$$\lg^2(a^2x^2)=\lg^2(ax)^2=\left(\lg(ax)^2\right)^2=$$

$$=(2\lg|ax|)^2=4\lg^2|ax|,$$

то уравнение сводится к равносильному виду:

$$4\lg^2|ax|=4\lg ax \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ax>0, & (1) \\ \lg^2 ax=\lg ax. & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (2). Обозначив $\lg ax=t$, получим уравнение: $t^2-t=0$

$$t^2-t=0 \Leftrightarrow$$

$$t(t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0, \\ t=1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \lg ax=0, \\ \lg ax=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ll} ax=1, & (3) \\ ax=10. & (4) \end{array}\right.$$

Неравенство (1) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} a>0 \\ x>0 \end{cases} \qquad (5)$$

или

$$\begin{cases} a<0, \\ x<0. \end{cases} \qquad (6)$$

- ✓ Из (3) и (5) следует: при $a>0$, $x=\dfrac{1}{a}$;
- ✓ из (3) и (6) следует: при $a<0$, $x=\dfrac{1}{a}$;
- ✓ из (4) и (5) следует: при $a>0$, $x=\dfrac{10}{a}$;
- ✓ из (4) и (6) следует: при $a<0$, $x=\dfrac{10}{a}$.

Объединяя полученные результаты, запишем ответ.

Ответ. При $a\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ $x_1=\dfrac{1}{a}$, $x_2=\dfrac{10}{a}$; при $a=0$ корней нет.

Пример 11. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|2^{1-x}-a\right|-\left|\frac{1}{2^x}+2a\right|=4^{-x}$$

имеет единственное решение. ([1], тренировочная работа, № 18)

Решение

Пусть

$$\frac{1}{2^x}=t,$$

$$t>0.$$

Тогда данное уравнение примет вид:

$$\left|2\cdot\frac{1}{2^x}-a\right|-\left|\frac{1}{2^x}+2a\right|=\left(\frac{1}{2^x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$t^2-2\left|t-\frac{a}{2}\right|+|t+2a|=0. \qquad (*)$$

Если $a=0$, то уравнение (*) примет вид:

$$t^2-t=0 \Leftrightarrow$$

$$t(t-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} t-1=0, \\ t=0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=0 \end{array}\right. \Rightarrow t=1.$$

Значит, при $a=0$ $t=1$.

Если $a>0$, то модули (см. (*)) обращаются в нуль в точках $t_1=\dfrac{a}{2}>0$ и $t_2=-2a<0$. Нанесём точки t_1 и t_2 на координатную ось t и раскроем модули в полученных интервалах (*рис. 1*).

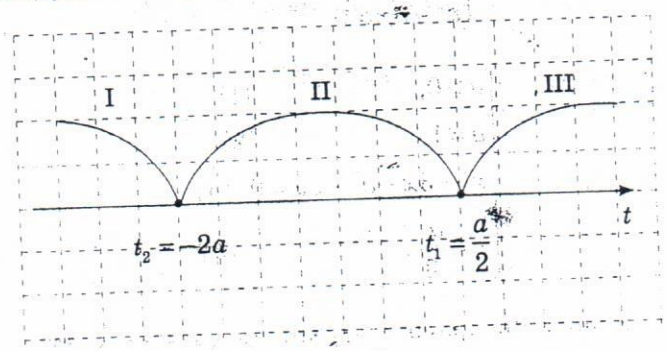


Рис. 1

I) $t\in(-\infty;-2a]$, $t-\dfrac{a}{2}<0$, $t+2a\le 0$

и уравнение (*) запишется так:

$$t^2-2\cdot\left(-\left(t-\frac{a}{2}\right)\right)+(-(t+2a))=0,$$

$$t^2+2t-a-t-2a=0,$$

$$t^2+t-3a=0. \qquad (2)$$

По условию уравнение (2) должно иметь единственное решение $t>0$, т. е. t должен быть двукратным корнем.

Положим:

$$D=1+12a=0 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{12}<0 \text{ —}$$

противоречие допущению $a>0$.

II) $t\in\left(-2a;\frac{a}{2}\right]$, $t-\frac{a}{2}\le 0$, $t+2a>0$

и

$$t^2+2t-a+t+2a=0,\quad t^2+3t+a=0. \qquad (3)$$

$$D=9-4a=0 \Leftrightarrow a=\frac{9}{4}>0.$$

Двукратный корень уравнения (3): $t=-\frac{3}{2}<0$.

III) $t\in\left(\frac{a}{2};+\infty\right)$, $t-\frac{a}{2}>0$, $t+2a>0$

и

$$t^2-2t+a+t+2a=0,$$

$$t^2-t+3a=0. \qquad (4)$$

$$D=1-12a=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{12}>0.$$

Двукратный корень уравнения (4):

$$t=\frac{1}{2}>0.$$

Значит, при

$$a=\frac{1}{12}\quad t=\frac{1}{2}.$$

Если $a<0$,

то

$$t_1=\frac{a}{2}<0$$

и $t_2=-2a>0$ (*рис. 2*)

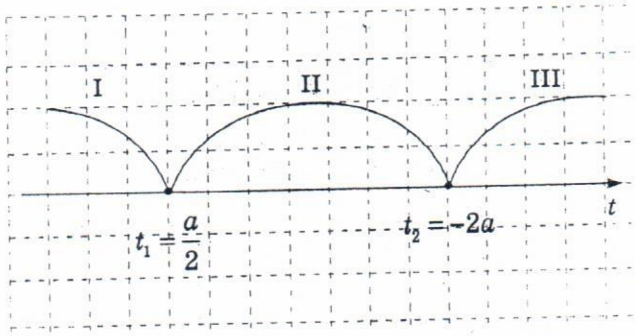


рис. 2

I) $t\in\left(-\infty;\frac{a}{2}\right]$, $t-\frac{a}{2}\le 0$, $t+2a<0$

и

$$t^2+2t-a-t-2a=0,$$

$$t^2+t-3a=0. \qquad (5)$$

$$D=1+12a=0 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{12}<0.$$

Двукратный корень уравнения (5):

$$t=-\frac{1}{2}<0.$$

II) $t\in\left(\frac{a}{2};-2a\right]$, $t-\frac{a}{2}>0$, $t+2a\le 0$

и

$$t^2-2t+a-t-2a=0,$$

$$t^2-3t-a=0. \qquad (6)$$

$$D=9+4a=0 \Leftrightarrow a=-\frac{9}{4}<0.$$

Двукратный корень уравнения (6):

$$t=\frac{3}{2}>0.$$

Значит, при

$$a=-\frac{9}{4}\quad t=\frac{3}{2}.$$

III) $t\in(-2a;+\infty)$, $t-\frac{a}{2}>0$, $t+2a>0$

и

$$t^2-2t+a+t+2a=0,\quad t^2-t+3a=0.$$

$$D=1-12a=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{12}>0 \text{ —}$$

противоречие допущению $a<0$.

Ответ. $a=-\frac{9}{4}$, $a=0$, $a=\frac{1}{12}$.

Примечание. Естественно возникает существенный вопрос: «Почему в решении задачи 11 мы для квадратного уравнения полагали дискриминант $D=0$? Ведь квадратное уравнение может иметь одним своим корнем число 0, а другим — положительное число, а также корни противоположных знаков. Первый случай мы привели в решении при $a=0$. А почему исключили второй случай?

Дадим объяснение.

Запишем уравнение (2) (см. решение задачи; $a>0$)

$$t^2+t-3a=0. \qquad (*)$$

Графиком функции $f(t)=t^2+t-3a$ является парабола с ветвями, направленными вверх; с вершиной $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}-3a\right)$, пересекающая ось Ot — в точках $(0;t_1)$ и $(0;t_2)$ (где t_1 и t_2 — корни уравнения (*); $t_1<0$, $t_2>0$), осью $t=-\frac{1}{2}$ (*рис. 3*).

Но в зависимости от параметра $a>0$ вершина параболы будет смещаться по прямой $t=-\frac{1}{2}$ и искомые точки пересечения будут меняться (имеем сеть парабол), т. е. $t_2>0$ будет принимать значения из интервала $(0;+\infty)$. Следовательно, $t_2>0$ будет не единственным решением задачи 11 — чего требует её условие. Вот и поэтому мы и полагали $D=0$!

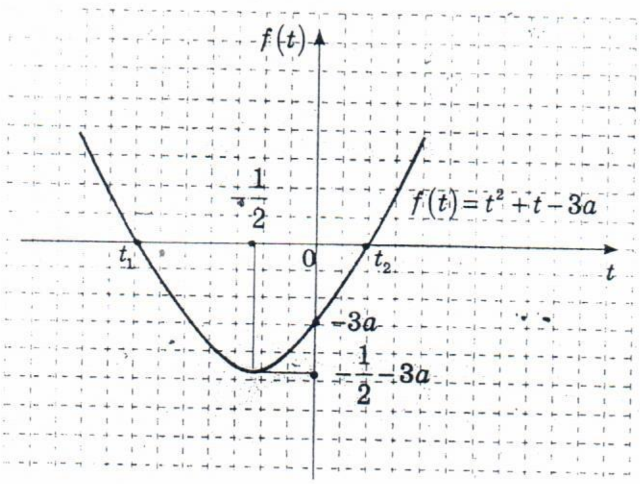


Рис. 3

Пример 12. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\log_{0,5}(x^2)-a\right|-\left|\log_{0,5}x+2a\right|=\left(\log_{0,5}x\right)^2 \qquad (*)$$

имеет хотя бы одно решение, меньше 2. ([1], тренировочная работа 20, № 18)

Решение

По требованию задачи $x<2$ и ОДЗ: $x>0$. Отсюда

$$0<x<2. \qquad (1)$$

Пусть

$$\log_{0,5}x=t.$$

Тогда

$$\log_{0,5}(x)^2=2\log_{0,5}x=2t$$

и уравнение (*) запишется так:

$$|2t-a|-|t+2a|=t^2$$

или

$$2\left|t-\frac{a}{2}\right|-|t+2a|=t^2. \qquad (2)$$

Определим границы t:

$$\log_{0,5}x=t \Leftrightarrow x=0,5^t=2^{-t} \text{ (см. (1))}:$$

$$0<2^{-t}<2 \Leftrightarrow -t<1 \Leftrightarrow t>-1. \qquad (3)$$

1) Если $a=0$, то (см. (2)):

2) $2|t|-|t|=t^2 \Leftrightarrow |t|=t^2 \Leftrightarrow t^2=t^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0, \\ t=-1, \\ t=1 \end{array}\right. \Rightarrow t=1.$

Значит, при $a=0$ (4) $t=1$.

Модули в уравнении (2) обращаются в ноль в точках $t_1=\frac{a}{2}$ и $t_2=-2a$. Нанесём эти точки на координатную ось t, раскроем модули в полученных уравнениях и решим уравнение в каждом промежутке в отдельности.

2) Если $a>0$, то $t_1=\frac{a}{2}>0$ и $t_2=-2a<0$ (*рис. 4*):

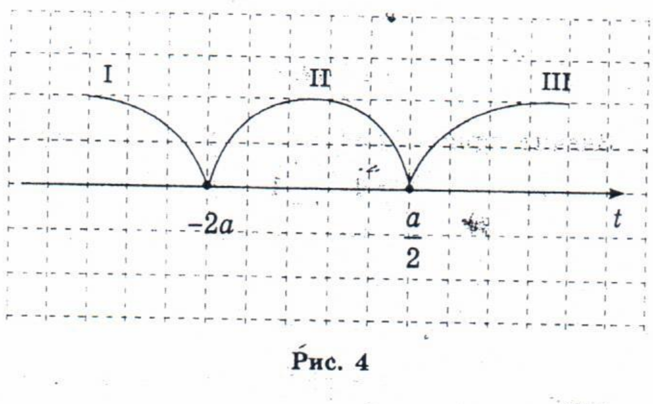


Рис. 4

I) $t\in(-\infty;-2a]$, $t-\frac{a}{2}<0$, $t+2a\le 0$

и

$$-2t+a+t+2a=t^2,\ t^2+t-3a=0.$$

$$D=1+12a\geq 0 \Leftrightarrow a\geq -\frac{1}{12} \Rightarrow a>0;$$

$$t_1=\frac{-1-\sqrt{1+12a}}{2}>-1 \text{ (см. (3))},$$

$$-1-\sqrt{1+12a}>-2,$$

$$-\sqrt{1+12a}>-1,\ \sqrt{1+12a}<1,$$

$$1+12a<1,\ 12a<0,$$

$a<0$ — противоречие допущению $a>0$;

$$t_2=\frac{-1+\sqrt{1+12a}}{2}>-1 \text{ (см. (3))},$$

$$-1+\sqrt{1+12a}>-2,$$

$\sqrt{1+12a}>-1$ — что верно, т.к. $\sqrt{1+12a}\geq 0$.

Значит, при $a>0$ (5) существует $t=t_2$.

II) $t\in\left(-2a;\frac{a}{2}\right]$, $t-\frac{a}{2}\leq 0$, $t+2a>0$

и

$$-2t+a-t-2a=t^2,$$

$$t^2+3t+a=0.$$

$$D=9-4a\geq 0,$$

$$a\leq\frac{9}{4}\underset{(a>0)}{\Rightarrow}0<a\leq\frac{9}{4}; \qquad (6)$$

$$t_1=\frac{-3+\sqrt{9-4a}}{2}>-1 \text{ (см. (3))},$$

$$-3+\sqrt{9-4a}>-2,$$

$\sqrt{9-4a}>1$, $9-4a>1$, $-4a>-8$, $a<2$ (7).

Из (6) и (7) следует: $0<a<2$.

Значит, при $0<a<2$ (8) следует $t=t_2$.

III) $t\in\left(\frac{a}{2};+\infty\right)$, $t-\frac{a}{2}>0$, $t+2a>0$

и $2t-a-t-2a=t^2$, $t^2-t+3a=0$.

$$D=1-12a\geq 0,$$

$$a\leq\frac{1}{12}\underset{(a>0)}{\Rightarrow}0<a\leq\frac{1}{12}; \qquad (9)$$

$$t_1=\frac{1-\sqrt{1-12a}}{2}>-1 \text{ (}см.\ (3)\text{)},$$

$$1-\sqrt{1-12a}>-2,$$

$$-\sqrt{1-12a}>-3,\ \sqrt{1-12a}<3,$$

$$1-12a<9,\ -12a<8,$$

$$a>-\frac{2}{3}\underset{(a>0)}{\Rightarrow}a>0;$$

$$t_2=\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2}>-1 \text{ (}см.\ (3)\text{)},$$

$1+\sqrt{1-12a}>-2$, $\sqrt{1-12a}>-3$ —

что верно, т. к.

$$\sqrt{1-12a}\geq 0.$$

Значит (см. (9)), при $0<a\leq\frac{1}{12}$ (10) существуют t_1 и t_2.

3) Если $a<0$, то $t_1=\frac{a}{2}<0$ и $t_2=-2a>0$ (*рис. 5*):

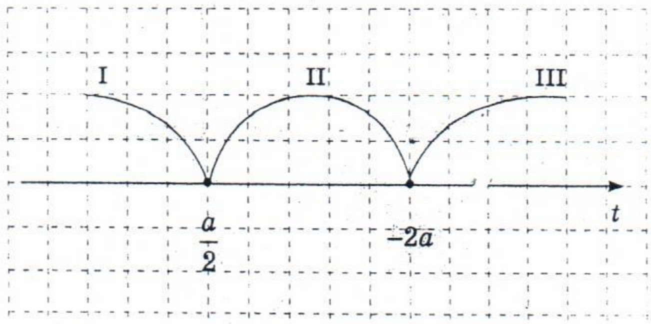


Рис. 5

I) $t\in\left(-\infty;\frac{a}{2}\right]$, $t-\frac{a}{2}\leq 0$, $t+2a<0$

и

$$-2t+a+t+2a=t^2,\ t^2+t-3a=0.$$

$$D=1+12a\geq 0,$$

$$a\geq-\frac{1}{12}\underset{(a<0)}{\Rightarrow}-\frac{1}{12}\leq a<0; \qquad (11)$$

$$t_1=\frac{-1-\sqrt{1+12a}}{2}>-1 \text{ (см. (3))},$$

$$-1-\sqrt{1+12a}>-2,$$

$$-\sqrt{1+12a}>-1,$$

$$\sqrt{1+12a}<1,$$

$$1+12a<1,\ 12a<0,\ a<0 \text{ —}$$

что выполняется;

$$t_2=\frac{-1+\sqrt{1+12a}}{2}>-1 \text{ (см. (3))},$$

$$-1+\sqrt{1+12a}>-2,$$

$$\sqrt{1+12a}>-1 \text{ —}$$

что верно, т. к.

$$\sqrt{1+12a}\ge 0.$$

Значит (*см. (11)*), при $-\frac{1}{12}\le a<0$ (12) существуют t_1 и t_2.

II) $t\in\left(\frac{a}{2};-2a\right]$, $t-\frac{a}{2}>0$, $t+2a\le 0$

и $2t-a+t+2a=t^2$, $t^2-3t-a=0$.

$$D=9+4a\ge 0,\ a\ge-\frac{9}{4}\underset{(a<0)}{\Rightarrow}-\frac{9}{4}\le a<0; \qquad (13)$$

$$t_1=\frac{3-\sqrt{9+4a}}{2}>-1 \text{ (см. (3))},$$

$$3-\sqrt{9+4a}>-2,$$

$$-\sqrt{9+4a}>-5,\ \sqrt{9+4a}<5,$$

$$9+4a<25,\ 4a<16,$$

$$a<4\underset{(a<0)}{\Rightarrow}a<0 \text{ —}$$

что верно;

$$t_2=\frac{3+\sqrt{9+4a}}{2}>-1 \text{ (см. (3))},$$

$$3+\sqrt{9+4a}>-2,\ \sqrt{9+4a}>-5 \text{ —}$$

верно, т. к.

$$\sqrt{9+4a}\ge 0.$$

Значит, (см. (13)), при $-\frac{9}{4}\le a<0$ (14) существуют t_1 и t_2.

III) $t\in(-2a;+\infty)$, $t-\frac{a}{2}>0$, $t+2a>0$ и

$$2t-a-t-2a=t^2,\ t^2-t+3a=0.$$

$$D=1-12a\ge 0,$$

$$a\le\frac{1}{12}\underset{(a<0)}{\Rightarrow}a<0 \text{ — } (15) \text{ что выполняется;}$$

$$t_1=\frac{1-\sqrt{1-12a}}{2}>-1 \text{ (см. (3))},$$

$$1-\sqrt{1-12a}>-2,$$

$$-\sqrt{1-12a}>-3,\ \sqrt{1-12a}<3,$$

$$1-12a<9,\ -12a<8,$$

$$a>-\frac{2}{3}\underset{(a<0)}{\Rightarrow}-\frac{2}{3}<a<0. \ (16)$$

Значит (*см. (15), (16)*), при $-\frac{2}{3}\le a<0$ (*17*) существуют t_1 и t_2.

Объединяя полученные результаты (4), (5), (8), (10), (12), (14) и (17), и, полагая $a>0$ (*см. (5)*) принадлежащим промежутку $(0;2)$ (этого достаточно для ответа на вопрос задачи), получим ответ.

Ответ. $-\frac{9}{4}\le a<2$.

Пример 13. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$2+\log_2(x-6a-4)\le\log_2(-x-14a+44)$$

не имеет решений.

Решение

Сначала попробуем решить неравенство. Оно равносильно системе:

$$\begin{cases}4(x-6a-4)\le -x-14a+44,\\ x-6a-4>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}5x-10a-60\le 0,\\ x>6a+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2a+12,\\ x>6a+4.\end{cases}$$

Эта система будет иметь решения, когда $2a+12>6a+4$, т. е. при $a<2$.

Ответ. При $a \geq 2$ неравенство не имеет решений.

Пример 14. Решите неравенство

$$\log_a(5-x) > \log_a(x-1). \qquad (1)$$

Решение

ОДЗ: $\begin{cases} 5-x>0, \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow 1<x<5.$

Неравенство (1) равносильно системе.

$$\begin{cases} 1<x<5, \\ \log_a(5-x) > \log_a(x-1). \end{cases} \qquad (2)$$

Рассмотрим два случая в зависимости от основания a логарифмов.

Случай 1. $a>1$. Тогда система (2) равносильна системе:

$$\begin{cases} 1<x<5, \\ 5-x>x-1 \end{cases} \Rightarrow 1<x<3.$$

Случай 2. $0<a<1$. Тогда система (2) равносильна системе:

$$\begin{cases} 1<x<5, \\ 5-x<x-1 \end{cases} \Rightarrow 3<x<5.$$

Ответ. Если $a>1$, то $x \in (1;3)$; если $0<a<1$, то $x \in (3;5)$; если $a \in (-\infty;0] \cup \{1\}$, то решений нет.

Пример 15. Решите неравенство

$$\frac{6\log_a x+9}{\log_a^2 x+2} > 1.$$

Решение

Пусть

$$\log_a x = t.$$

Тогда

$$\frac{6t+9}{t^2+2} > 1 \underset{t^2+2>0}{\Leftrightarrow} 6t+9>t^2+2 \Leftrightarrow$$

$$t^2-6t-7<0$$

$$(t+1)(t-7)<0 \Rightarrow$$

$$-1<t<7.$$

$$-1<\log_a x<7.$$

Это неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1, \\ a^{-1}<x<a^7; \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1, \\ a^7<x<a^{-1}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. Если

$$a \in (-\infty;0] \cup \{1\},$$

то решений нет; если

$$0<a<1, \text{ то } x \in (a^7;a^{-1});$$

если

$$a>1, \text{ то } x \in (a^{-1};a^7).$$

Пример 16. При каком значении параметра a неравенство $9^x - a \cdot 3^x - a + 3 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение?

Решение

Пусть $3^x = t$, $t>0$, тогда данное уравнение примет вид:

$$t^2 - a \cdot t + 3 - a \leq 0; \qquad (1)$$

$$D = a^2 + 4a - 12 = (a+6)(a-2).$$

Знаки дискриминанта (*рис. 6*):

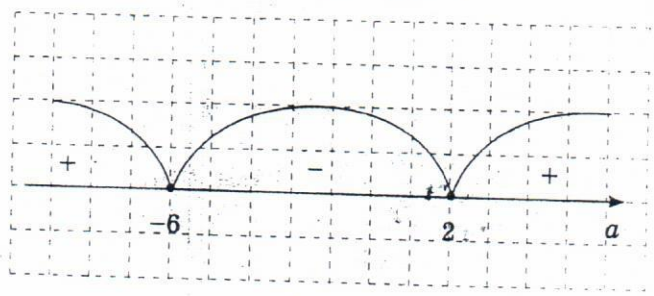


Рис. 6

Чтобы неравенство имело хотя бы одно решение, необходимо чтобы корни существовали, т. е.

$$D \geq 0 \underset{(рис.6)}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} a \leq -6, \\ a \geq 2. \end{array}\right.$$

Если $a \leq -6$, то левая часть неравенства (1) положительна (так как все слагаемые в ней положительны) и неравенство невозможно.

Значит, при $a \leq -6$ неравенство решений не имеет.

Таким образом, $a \geq 2$.

Ответ. При $a \in [2;+\infty)$.

Пример 17. Решите неравенство

$$2\cdot 9^x + a\cdot 3^x - a^2 < 0.$$

Решение

Если $a=0$, то $2\cdot 9^x < 0$ — что неверно, т. к. $2\cdot 9^x > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Значит, при $a=0$ неравенство решений не имеет.

Если $a \neq 0$, то положим $3^x = t$, $t>0$.

Тогда

$$2t^2 + at - a^2 < 0. \qquad (*)$$

$$2t^2 + at - a^2 = 0,$$

$$D = a^2 + 8a^2 = 9a^2.$$

Корни уравнения:

$$t_1 = \frac{-a-3a}{4} = -a,$$

$$t_2 = \frac{-a+3a}{4} = \frac{a}{2}.$$

Рассмотрим два случая:

1) $a>0$, тогда решения неравенства (*)

$$t \in \left(-a; \frac{a}{2}\right).$$

Перейдём к переменной x с учётом того, то $t>0$.

Имеем:

$$3^x < \frac{a}{2},\ x < \log_3 \frac{a}{2}.$$

2) $a<0$, тогда неравенство имеет решения $3^x < -a$, откуда получим $x < \log_3(-a)$.

Ответ. При $a=0$ решений нет; при $a>0$ $x < \log_3 \frac{a}{2}$; при $a<0$ $x<\log_3(-a)$.

Пример 18. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $5^{x+1} + 5 \geq a(2\cdot 5^x + 1)$ имеет только отрицательные решения.

Решение

Пусть $5^x = t$, $t>0$. По условию $x<0 \Rightarrow 5^x < 1$, т. е. $t<1$ $(0<t<1)$.

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 5t+5 \geq a(2t+1), \\ 0<t<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5-2a)t \geq a-5, & (1) \\ 0<t<1. & (2) \end{cases} \qquad (*)$$

Требуется найти значения параметра a из неравенства (1) системы (*), удовлетворяющие неравенству (2).

Относительно неравенства (1) рассмотрим три случая:

1) Если

$$5-2a=0 \Leftrightarrow a=\frac{5}{2},$$

то

$$0\cdot t \geq \frac{5}{2} - 5 \Leftrightarrow 0\cdot t \geq -\frac{5}{2},$$

откуда $t\in\mathbb{R}$ (3).

Значит, при $a=0$ множество решений неравенства (1) — множество (3) не удовлетворяет условию (2).

2) Если

$$5-2a>0 \Leftrightarrow a<\frac{5}{2}, \qquad (4)$$

то система (*) равносильна системе:

$$\begin{cases} t \geq \dfrac{a-5}{5-2a}, \\ 0<t<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a-5}{5-2a} < 1, \\ \dfrac{a-5}{5-2a} > 0, \\ a < \dfrac{5}{2}, \end{cases}$$

откуда получаем, что система не имеет решений.

3) Если $5-2a<0 \Leftrightarrow a>\frac{5}{2}$, то система (*) равносильна системе:

$$\begin{cases} t \leq \dfrac{a-5}{5-2a}, \\ t>0 \end{cases}$$

и множество её решений удовлетворяет условию (2) тогда и только тогда, когда выполняется следующие условия:

$$\begin{cases} 5-2a<0, \\ 0<\dfrac{a-5}{5-2a} \leq t<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{5}{2}, \\ 0<\dfrac{a-5}{5-2a}<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a>\dfrac{5}{2}, \\ a-5<0, \\ a-5>5-2a \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{3}<a<5.$$

Ответ. $a \in \left(\dfrac{10}{3}; 5\right)$.

Пример 19. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$(5^x-125)(2^x-128)(3^x-3^{2a})(4^x-4^{2a+4}) \le 0$$

имеет только два решения. Найти эти решения.

Решение

Запишем неравенство в равносильном виде:

$$(5^x-5^3)(2^x-2^7)(3^x-3^{2a})(4^x-4^{2a+4}) \le 0.$$

Корни соответствующего уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=7, \\ x=2a, \\ x=2a+4. \end{array}\right.$$

По условию корни $x=3$ и $x=7$ должны быть кратными двум другим корням (так как $2a+4>2a$), то это возможно только при $a=1{,}5$, так как

$$\begin{cases} 2a=3, \\ 2a+4=7. \end{cases}$$

Ответ. При $a=1{,}5$ имеет только два решения: $x_1=3$ и $x_2=7$.

Пример 20. Найдите все значения a, при каждом из которых решением неравенства $2^{a-|x|} > \dfrac{1}{2}$ является интервал $(-1;1)$?

Решение

$$2^{a-|x|} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{a-|x|} > 2^{-1} \Leftrightarrow a-|x| > -1 \Leftrightarrow$$

$$|x| < a+1 \Leftrightarrow -(a+1) < x < a+1.$$

Тогда положим $a+1=1$, т. е. $a=0$.

Ответ. При $a=0$.

Пример 21. Решите уравнение

$$|\log_2(x+3)| = -(x+a)^{2n},\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Решение

Имеем:

$$|\log_2(x+3)| + (x+a)^{2n} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+3)=0, \\ x+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+3=1, \\ a=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ a=2. \end{cases}$$

Ответ. Если $a=2$, то $x=-2$; если $a \ne 2$, то корней нет.

Пример 22. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{a+1-x}{x-a} \ge 0, & (1) \\ 4^x - 5\cdot 2^{x+1} + 9 \ge 0 & (2) \end{cases}$$

не имеет решений?

Решение

Решение неравенства (1):

$$\frac{a+1-x}{x-a} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x-a-1}{x-a} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x-(a+1)}{x-a} \le 0.$$

Используем метод интервалов (*рис. 7*).

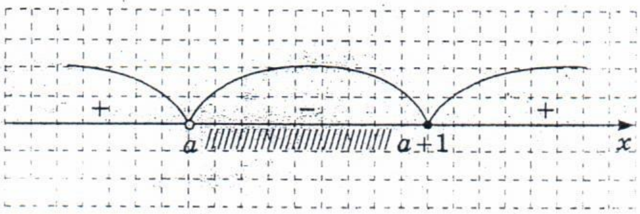


Рис. 7

Имеем:

$$x \in (a; a+1]. \qquad (3)$$

Решение неравенства (2):

$$4^x - 5\cdot 2^{x+1} + 9 \ge 0,$$

$$2^x = t,\ t>0,$$

$$t^2 - 10t + 9 \ge 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-9) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} t \le 1, \\ t \ge 9 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x \le 1, \\ 2^x \ge 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ x \ge \log_2 9. \end{array}\right. \ (\textit{Рис. 8})$$

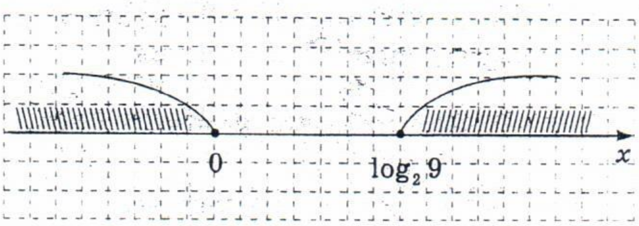


Рис. 8

$$x \in (-\infty; 0] \cup [\log_2; +\infty) \qquad (4)$$

Требование задачи (система не имеет решений) выполняется при условии (*см. (3) и (4)*):

$$\begin{cases} a \ge 0, \\ a+1 < \log_2 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0, \\ a < \log_2 9 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le a < \log_2 9 - 1 .$$

Ответ. При $a \in [0; \log_2 9 - 1)$.

Пример 23. Найти все неотрицательные значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \le \frac{2a + x^2 - 4\log_{\frac{1}{3}}\left(4a^2 - 4a + 9\right)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 2a + 4 + \log^2_{\frac{1}{3}}\left(4a^2 - 4a + 9\right)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение. ([1], тренировочная работа 12, № 18)

Решение

Заметим, что

$$\sqrt{18x^4 + 7x^2} \ge 0 .$$

По условию $a \ge 0$. Так как

$$4a^2 - 4a + 9 = (2a-1)^2 + 8 > 1 ,$$

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(4a^2 - 4a + 9\right) < 0$$

и

$$\log^2_{\frac{1}{3}}\left(4a^2 - 4a + 9\right) > 0 .$$

Отсюда знаменатель дроби в данном неравенстве положителен.

Освобождая данное неравенство от дроби, получим равносильное неравенство:

$$5\sqrt{18x^4 + 7x^2} - x^2 \le -\log^2_{\frac{1}{3}}\left(4a^2 - 4a + 9\right) -$$

$$-4\log_{\frac{1}{3}}\left(4a^2 - 4a + 9\right) - 4 .$$

Для левой части этого неравенства имеем:

$$5\sqrt{18x^4 + 7x^2} - x^2 = 5\sqrt{18x^4 + 7x^2} - \sqrt{x^4} \ge 0 ,$$

так как

$5\sqrt{18x^4 + 7x^2} \ge \sqrt{x^4}$ ($18x^4 + 7x^2 \ge x^4 \ge 0$ — равенство достигается при $x = 0$).

Заметим, что правая часть

$$-\log^2_{\frac{1}{3}}\left(4a^2 - 4a + 9\right) - 4\log_{\frac{1}{3}}\left(4a^2 - 4a + 9\right) - 4 \le 0 .$$

Следовательно, неравенство выполняется при условии:

$$\begin{cases} 5\sqrt{18x^4 + 7x^2} - x^2 = 0, \\ -\log^2_{\frac{1}{3}}\left(4a^2 - 4a + 9\right) - 4\log_{\frac{1}{3}}\left(4a^2 - 4a + 9\right) - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ \left(\log_{\frac{1}{3}}\left(4a^2 - 4a + 9\right) + 2\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ \log_{\frac{1}{3}}\left(4a^2 - 4a + 9\right) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ 4a^2 - 4a + 9 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ a^2 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ a(a-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a - 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ. $x = 0$ при $a = 0$ или $a = 1$.

Литература

1. *ЕГЭ 2016*. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2 / И. В. Ященко, М. А. Волкевич, И. Р. Высоцкий и др.; под ред. И. В. Ященко. — М. : Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2016 — 215, [1] с. (серия «ЕГЭ. 30 вариантов. Типовые тестовые задания»)
2. *Сефибеков С. Р.* Психолого-педагогические условия развития математического образования школьников в инновационной школьной среде: монография.— Н. Новгород : НИУ РАНХ и ГС, 2014.— 172 с.
3. *Сефибеков С. Р.* Организация элективного курса по математике в средней школе: математические рекомендации для педагогов / С. Р. Сефибеков.— Н. Новгород : НИУ РАНХ и ГС, 2014.— 35 с.

■

Литература.

1. Сефибеков С.Р. Первичное знакомство с параметром //Математика. ВСЁ для учителя! - 2017._№11_С.5-9; №12_С.5-7; 2018._№1_С.8-13.
2. СефибековС.Р. Квадратные уравнения с параметром. Иррациональные уравнения и неравенства с параметром. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства с параметром // Математика. ВСЁ для учителя!_2019._№5-6._С.2-49.